Задачи

1. *Игры вычитания* — это класс комбинаторных игр, в которых задано положительное целое n и множество S положительных целых. Двое игроков ходят поочередно. Ход состоит в вычитании из первоначально равного n числа какого-то числа $s \in S$. Последний, кто делает ход, выигрывает. Можно иначе интерпретировать правила: имеется кучка из n предметов (например, спичек) и по очереди игроки забирают из нее несколько предметов. Сколько — это определяется числами из заданного множества S.

Проанализировать и найти P- и N-позиции для игр *вычитания* с множеством вычитаемых
1) $S = \{1, 2, 3\}$; 2) $S = \{1, 3, 4\}$; 3) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 4) $S = \{1, 3, 6\}$;
5) $S = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ = все нечетные числа; 6) $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ = все степени 2;
7) $S = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ = все полные квадраты.

Во всех этих играх (1-7):
a) если начальное число 100, кто выигрывает, первый или второй игрок?
b) найдите все выигрышные ходы (если они есть), при условии, что начальное число 31.

Далее, найти P- и N-позиции для игр *вычитания* с множеством S, зависящим от параметра:
8) $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ $(n > 0)$;
9) $S = \{1, 2, n\}$ $(n > 2)$.

2. *Игра «Тридцать одно»*. (Geoffrey Mott-Smith, 1954). Из колоды карт выбираются туз, 2, 3, 4, 5 и 6 каждой масти. Эти 24 карты выкладываются лицом вверх на столе. Туз считается за единицу. Игроки по очереди переворачивают карты (одну за ход) и в процессе игры подсчитывают сумму перевернутых карт. Игрок, у которого сумма впервые превзойдет 31, проигрывает. Эта игра похожа на игру вычитания с вычитаемыми 1,2,3,4,5,6 и начальной позицией 31. Однако между ними есть существенное различие.
1) Найдите выигрывающую стратегию для игры вычитания с $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, начиная в позиции 31.
2) Определите различие между игрой «Тридцать одно» и игрой вычитания из 1).
3) Что произойдет, если 1-й игрок будет придерживаться стратегии, найденной вами в 1), а его противник будет придерживаться выбора 4?
4) Тем не менее, 1-й игрок может выиграть. Найдите выигрывающую стратегию для игры «Тридцать одно».

3. *Мизер-вариант игры вычитания*, $S = \{1, 2, 3\}$. Последний игрок, делающий ход, проигрывает. Цель — вынудить противника взять последний предмет. Проанализируйте игру. Найдите целевые позиции (Р-позиции).

4. *«Опустошай и разделяй»*. (Ferguson, 1998). В двух коробках находятся предметы, в первой — m, во второй — n. Обозначим начальную позицию (m, n), где $m > 0$, $n > 0$. Двое игроков ходят поочередно. Ход заключается в опеустошении одной из коробок и разделении содержимого другой между двумя коробками так, чтобы в каждой оказался хотя бы один предмет. Последний игрок, сделавший ход, выигрывает. Имеется единственная терминальная позиция (1,1). Найдите все P-позиции.

5. *Ним-сумма.* 1) Найдите ним-сумму $27 \oplus 17$; 2) $38 \oplus x = 25$, найти x.

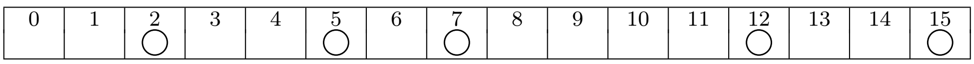
6. *Ним.* Имеется несколько куч предметов. Число предметов в кучах — $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Соответствующая позиция обозначается $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Играют два игрока, поочередно делающие ходы. Каждый ход заключается в том, что игрок выбирает кучу и берет из нее любое число предметов: хотя бы один, но может и всю кучу целиком. Игрок, взявший последний предмет, выигрывает игру.

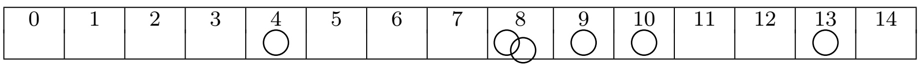
В игре *ним* найти все выигрывающие ходы в позициях:
1) (12,19,27); 2) (13,17,19,23).

Описать все P-позиции в ниме, если
3) имеется 2 кучи; 4) имеется 3 кучи, из которых одна состоит из 1 предмета.

7. *Нимбл.* На ленте, расчерченной на клетки с метками 0,1,2,3,..., есть несколько монет. Каждая монета находится в определенной клетке, и возможно более одной монеты в клетке. Ход — передвижение любой монеты в любую клетку влево, возможно, перепрыгивая через другие монеты, и возможно, в клетку, в которой уже есть монеты. Игроки ходят по очереди, и игра заканчивается, когда все монеты соберутся в самой левой клетке (0). Последний игрок, сделавший ход, выигрывает.

Показать, что данная игра есть замаскированный ним Определить, кто выиграет в следующих позициях? Если 1-й игрок, то найти выигрывающий ход.

1) 

2) 

8. *Ним-мизер.* Метод Бутона игры в ним-мизер таков. Играйте, как в нормальный ним, пока имеются хотя бы две кучи размером > 1. Когда ваш противник ходит так, что остается в точности одна куча размером > 1, уменьшите эту кучу до 0 или 1, чтобы осталось *нечетное* число куч размером = 1. Такой алгоритм работает, так как оптимальная стратегия игры в нормальный ним никогда не требует от вас оставлять в точности одну кучу размером > 1 (ним-сумма должна быть равна 0), а ваш противник не может перейти от двух куч размером > 1 к позиции, в которой нет куч размером > 1. Поэтому в конце концов игра приходит к ситуации, где имеется в точности одна куча размером > 1 и ваша очередь хода.

Найдите выигрывающие ходы в позициях:
1) (1,1,12); 2) (1,5,12); 3) (12,19,27).

9. Игра *Цзяньшинцзы (выбирание камней).* Имеется позиция — пара неотрицательных целых чисел (m,n). Ход заключается в том, что можно
a) вычесть из одного числа положительное целое;
b) вычесть из обоих чисел одно и то же положительное целое.

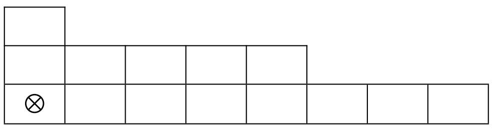
Покажите, что эта игра эквивалентна игре *Витхофа(Wythoff)* (“*раненый ферзь*”): на шахматной доске ферзь из позиции (m,n) может ходить вниз, влево или по диагонали влево-вниз. Выигрывает тот, кто поставит его на поле (0,0).

Найдите P-позиции для доски 8x8. (Используйте алгоритм решета Эратосфена.)

10. Игра *Домино*. На доске $m \times n$ клеток. Игроки поочередно кладут домино (размером 1×2) на свободные клетки, вертикально или горизонтально. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает.
1) Кто выигрывает в 3×3 домино?
2) Кто выигрывает в $m \times n$ домино, m и n оба четные?
3) Кто выигрывает в $m \times n$ домино, m нечетное, n четное?

Ввиду известных ответов из 2) и 3), игра более интересна на доске $m \times n$, когда m и n оба нечетные. Попробуйте разыграть ее на доске 5×5.

11. *Чомп!* (Fred. Schuh, 1952, и независимо от него D. Gale, 1974). Имеется массив $m \times n$ точек. Ход состоит в выборе точки и удалении ее вместе со всеми точками кверху-справа от нее. Игроки ходят поочередно, и тот, кто удаляет последнюю точку, проигрывает. Можно вместо точек рассматривать клетки, образующие прямоугольный массив $m \times n$. Название игры «*чомп*» происходит от представления этого массива плиткой шоколада, а ходов в игре — отламыванием прямоугольных кусков от нее (чтобы съесть). Клетка (1,1) отравлена; игрок, съевший ее, проигрывает.
1) По правилам чомп — игра мизер. Как изменить конфигурацию точек (клеток), чтобы правила остались теми же, но игра стала нормальной?
2) Определите выигрывающего игрока и выигрывающий ход для чомпа размеров 2×2, 3×2, $m \times 2$, $m \times m$ $(m \geqslant 3)$.
3) Покажите, что следующая позиция — N-позиция, найдя выигрывающий ход (он единствен):



4) Известно, что первый игрок в чомпе может выиграть во всех прямоугольных позициях. Доказательство является чистым доказательством «существования» и не дает указаний на то, каким образом следует играть. Попробуйте найти доказательство.

Подсказка: является ли удаление верхнего правого угла выигрывающим ходом?

12. Игры *динамического вычитания*. Класс игр вычитания может быть расширен, если допустить зависимость множества S от последнего хода противника.

Пример: Имеется одна куча из n предметов. Первый игрок может взять любое число предметов из кучи, хотя бы один, но не всю кучу. Затем игроки ходят поочередно, и каждый игрок не может взять больше предметов, чем его противник на предыдущем ходе.
1) Найдите наилучший ход в позиции $n = 44$;
2) Найдите P-позиции.

13. *Ним Фибоначчи.* Правила такие же, как в предыдущей задаче, но каждый игрок (исключая самый первый ход) может взять не более удвоенного числа предметов, взятых его противником на предыдущем ходе. Анализ этой игры связан с *последовательностью Фибоначчи*, которая определяется соотношениями $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. Сама последовательность начинается с чисел: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ Для решения можно использовать

Теорема 1. (Цекендорф). Любое положительное целое можно единственным образом представить в виде суммы различных несоседних чисел Фибоначчи.

Например, $43 = 34 + 8 + 1$ — такое единственное представление; хотя $43 = 34 + 5 + 3 + 1$, здесь 5 и 3 - соседние числа.
1) Найти оптимальный ход для первого игрока в позиции $n = 43$;
2) Найдите P-позиции.

14. Игра *SOS*. Имеется строка из n клеток, первоначально пустых. Игроки поочередно выбирают пустую клетку и пишут там либо S, либо O. Выигрывает тот, кто первым завершит слово *SOS* в последовательных клетках. Игра может завершиться и вничью, если вся строка окажется исписанной, но слово *SOS* так и не появится.
1) Пусть $n = 4$ и первый игрок ставит S в 1-ю клетку. Показать, что второй игрок выигрывает.
2) Показать, что при $n = 7$ первый игрок может выиграть.
3) Кто выигрывает при $n = 14$?

15. *Опрокидывание.* В горизонтальный ряд в некотором порядке выложены монеты, одни вверх лицевой стороной (Λ), другие — оборотной (O). Ход заключается в переворачивании одной монеты Λ в O, и, при желании, еще одной монеты слева от нее (Λ в O или O в Λ). Например, в позиции

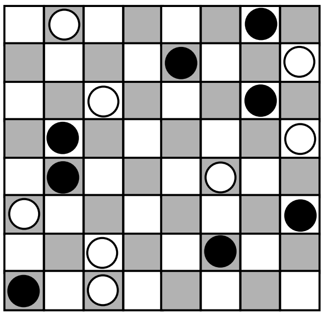
O	Λ	O	O	Λ	O	O	O	Λ	Λ	O	Λ	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

одним из возможных ходов является: перевернуть монету 9 из Λ в O и монету 4 из O в Λ.
1) Покажите, что данная игра — замаскированный ним, если Λ на n-м месте представить как кучу из n предметов.
2) Найдите выигрывающий ход в записанной выше позиции.

16. *Игра Норткотта.* На доске 8×8 расположены шашки: 1 белая и 1 черная шашка в каждом горизонтальном ряду. Ходы делают по очереди — каждый игрок может передвинуть любую шашку своего цвета влево или вправо на любую клетку, но не перепрыгивая через шашку и не ставя шашку на уже занятую клетку. Выигрывает игрок, сделавший последний ход.

Отметим:
1. Это — пристрастная игра, т.к. оодин игрок управляет только черными, а другой игрок — только белыми шашками.
2. Для игры не выполняется условие окончания, и она может продолжаться бесконечно.

Тем не менее, знание того, как правильно играть в ним, является преимуществом и в этой игре. Определите, кто выигрывает в позиции на рисунке, белые или черные? и зависит ли это от очереди хода?



17. *Ним на ступеньках.* (Sprague, 1937). На нескольких из n ступенек лестницы лежат монеты. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначает позицию с x_j монетами на ступеньке j $(j = 1, \ldots, n)$. Ход заключается в перемещении любого положительного числа монет с одной произвольной ступеньки, j, на следующую ниже, $j - 1$. Монеты, достигшие земли (ступенька 0), удаляются из игры. Игра заканчивается, когда все монеты попадают на землю. Игроки делают ходы по очереди, и последний, сделавший ход, выигрывает.

Покажите, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть P-позиция тогда и только тогда, когда количества монет на нечетных ступеньках, $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$ образуют P-позицию в обычном ниме.

18. *Ним$_k$* (или *Ним Мура*). (E.H.Moore, 1910). Обобщение нима было предложено Муром. Имеется n куч предметов. Игра *ним$_k$* протекает так же, как ним, за исключением того, что на каждом ходе игрок может забрать любое число (не менее 1) предметов из k произвольных куч. Обычный ним есть *ним$_1$*.

Теорема 2. (Мур). Позиция $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть P-позиция в *ним$_k$* тогда и только тогда, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представленные в двоичной системе счисления и сложенные без переноса по модулю $(k+1)$, дают 0. (Другими словами, число единичных бит в каждой колонке двоичного представления данной позиции должно делиться на $k + 1$.)

1) Найдите выигрывающие ходы в позиции (4,5,9,14) в ниме$_2$.

2) Докажите теорему Мура.

3) Найдите оптимальную выигрывающую стратегию в мизер-вариант игры *ним$_k$*.