

Самарский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть I. КОМБИНАТОРИКА

Методические разработки к курсу „Дискретная математика“
для студентов специальностей
„математика“ и „прикладная математика“

Самара 1996

Методические рекомендации рассчитаны на студентов 1 курса математических специальностей университетов, изучающих одно- или двухсеместровый курс дискретной математики и математической логики. Первая часть содержит материал, относящийся к комбинаторике. В ней затрагиваются элементарные вопросы теории множеств и связанные с ними задачи комбинаторного пересчета.

Составитель: И.С. Фролов

* * *

Методические рекомендации написаны на основе курса лекций, читаемого автором-составителем в течении ряда лет студентам-математикам. В них рассматриваются основные понятия теории множеств и одного из разделов дискретной математики — комбинаторики.

Курс дискретной математики сравнительно недавно появился в учебных программах чисто математических специальностей. Его значение трудно переоценить, если внимательно присмотреться к тому, как стремительно и основательно компьютерная технология вошла в жизнь современного общества. Являясь логической основой конструирования и анализа цифровых устройств, дискретная математика становится важным элементом в общении математика со специалистом по компьютерным наукам. Помимо этого, методы дискретной математики глубоко проникают в чисто математические дисциплины — алгебру, геометрию, теорию чисел.

Комбинаторика представляет собой один из весьма важных разделов дискретной математики. История комбинаторного анализа хорошо известна. Его истоки связаны с азартными играми и разнообразными лотереями, популярными, начиная с XVII века. Но лишь в последнее время осознано истинное место и значение комбинаторики для математики и вычислительной техники.

Комбинаторный анализ изучает дискретные множества. Для задач комбинаторики характерен отбор элементов, обладающих теми или иными свойствами, подсчет таких элементов, упорядочение их в определенном порядке. Поэтому совершенно необходимым является использование языка теории множеств.

Кратко изложим содержание отдельных параграфов. В первом параграфе изучаются операции над множествами, диаграммы Эйлера, формула включений-исключений. Второй параграф посвящен числам сочетаний, свойствам сочетаний и методу траекторий. Предмет третьего параграфа — упорядочения множеств и связанные с ними комбинаторные понятия: перестановки и размещения. Основу четвертого параграфа составляют отображения и их типы (инъекция, сюръекция, биекция), а так-

же разложения целых чисел. Изложены два важных принципа комбинаторики — принцип произведения и принцип биекции. Понятие мультимножества, вводимое в пятом параграфе, иллюстрируется на арифметических задачах. Далее, в шестом параграфе, оно же служит основой для построения перестановок мультимножества и доказательства мультиномиальной формулы, обобщающей формулу бинома Ньютона. Следующие два параграфа посвящены основам теории отношений; рассмотрены понятия декартова произведения множеств, композиции (произведения) отношений, отношения эквивалентности, разбиения множеств и связанные с ними числа Стирлинга и числа Белла. Девятый параграф возвращает к отображениям, но на более продвинутом уровне, и, наконец, в десятом параграфе изучаются числа Фибоначчи как введение в метод решения линейных однородных рекуррентных уравнений. Всюду последовательно проводится принцип: сначала определить теоретико-множественное понятие, а затем на его основе построить и изучить соответствующую комбинаторную конструкцию.

Поскольку методические разработки написаны в расчете на студентов I курса, только приступающих к изучению математических дисциплин, комбинаторная техника рассматривается в них на достаточно простом уровне параллельно с введением теоретико-множественных понятий. Изложение сопровождается большим количеством примеров и иллюстраций основных понятий и методов. В тексте также содержится ряд упражнений, предназначенных для самостоятельного решения, а в виде отдельного параграфа собраны задачи, которые могут быть использованы на семинарских занятиях.

Используются следующие логические символы:

- $A \implies B$ — „из A следует B “;
 $A \iff B$ — „ A тогда и только тогда, когда B “;
 $\forall x. A$ — „для всех x имеет место A “;
 $\exists x. A$ — „существует x такой, что A “;
 $\triangleleft \dots \triangleright$ — начало и конец доказательства.

Для более углубленного изучения комбинаторики следует обратиться к литературе, указанной в последнем разделе.

* * *

§1. Множества и операции над ними

1. Предварительные замечания

Предполагается, что читателю известны такие понятия, как: множества, элементы множества, способы задания множеств, число элементов конечного множества.

В дискретной математике одной из основных является следующая задача: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых при помощи некоторых операций.

Примем обозначения: A, B, C, \dots — множества; a, b, c, \dots — элементы множеств; $a \in A$ („ a есть элемент A “), $a \notin A$ („ a не есть элемент A “) — принадлежность и непринадлежность элемента множеству; $\#A$ — число элементов множества A .

Примеры: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{x \mid x \text{ — целое число}\}$ (читается: „ B — множество x таких, что x — целое число“) или $B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2. Операции над множествами

Два множества считаются *равными* между собой, если каждый элемент первого является элементом второго и, наоборот, каждый элемент второго является элементом первого: $A = B$.

Если A и B — множества, то множество C , которому принадлежат те и только те элементы, которые входят либо в A , либо в B , называется *суммой*, или *объединением*, множеств A и B :

$$C = A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ или } a \in B\}.$$

Операция объединения удовлетворяет *коммутативному* и *ассоциативному* законам :

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Первое из этих равенств вытекает из определения, второе равенство — из того, что $A \cup (B \cup C)$ и $(A \cup B) \cup C$ состоят из одних и тех же элементов, принадлежащих A или B или C . Поэтому в такой ситуации можно

опустить скобки: $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in C\}$. Точно также можно рассматривать сумму любого конечного числа множеств $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, не расставляя скобок, и это будет множество, в которое входят все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A_1, A_2, \dots, A_n :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{a \mid a \in A_1 \text{ или } a \in A_2 \text{ или } \dots \text{ или } a \in A_n\}.$$

Чем отличается сумма множеств от обычного сложения чисел? Рассмотрим пример: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Число элементов в каждом из двух слагаемых равно 3, а число элементов в объединении этих множеств равно $4 < 3 + 3$.

Еще одно отличие: для суммы множеств справедлив такой необычный закон: $A \cup A = A$.

С л е д с т в и е. $A \cup A \cup \dots \cup A = A$. (Объединение любого числа одинаковых множеств совпадает с этим множеством.)

Множество C , которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B , называется *пересечением* множеств A и B : $C = A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ и } a \in B\}$. Например: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$. Если A_1, A_2, \dots, A_n — множества, то их пересечение определяется так: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{a \mid a \in A_1 \text{ и } a \in A_2 \text{ и } \dots \text{ и } a \in A_n\}$. Пересечение множеств удовлетворяет таким же законам, что и объединение:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cap A = A.$$

Операции \cup и \cap удовлетворяют также *дистрибутивному* закону: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Пересечение множеств часто сопоставляют с операцией умножения чисел, но, в отличие от числовых операций, для которых справедлив только один дистрибутивный закон: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, для множеств имеется еще один: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

⟨ Пусть $a \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $a \in A$ или $a \in B \cap C$. Следовательно, можно утверждать, что $a \in A$ или $a \in B$, и в то же время, что $a \in A$ или $a \in C$. Таким образом, $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Рассуждения, доказывающие $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies a \in A \cup (B \cap C)$, аналогичны. ▷

Упражнение 1. Докажите первый закон дистрибутивности.

3. Пустое множество. Универсум

Множество $A \cap B$ может быть не определено, если A и B не имеют общих элементов. Чтобы избежать этого, рассматривают пустое множество, обозначаемое \emptyset . Пустое множество по определению не содержит ни

одного элемента. Так что можно записать $A \cap B = \emptyset$, если A и B не имеют общих элементов. Такие множества A и B называются *дизъюнктными* (*непересекающимися*). \emptyset играет роль 0 в операциях над множествами:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

А что играет роль 1? Если рассматриваются множества, содержащие элементы определенного типа, например, только числовые множества, то множество, содержащие все элементы данного типа, называется *универсальным* множеством, или *универсумом*, и обозначается U . Так как всякий элемент a , принадлежащий множеству A , обязательно принадлежит и универсуму U , то:

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

Множество C , содержащее те и только те элементы, которых нет в A , называется *дополнением* множества A : $C = \bar{A} = \{a \mid a \notin A\}$. Множество A вместе со своим дополнением \bar{A} удовлетворяет законам: $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = U$.

Дважды примененная операция дополнения приводит к исходному множеству: $\overline{\bar{A}} = A$. Пустое множество и универсум являются взаимно дополнительными множествами: $\bar{\emptyset} = U$, $\bar{U} = \emptyset$.

Операция дополнения связана с объединением и пересечением знаменитыми законами *де Моргана*:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

◁ Имеет место следующая цепочка равносильных утверждений: $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x$ не принадлежит ни A , ни $B \iff x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B} \iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. ▷

Упражнение 2. Докажите второй закон де Моргана.

4. Диаграммы Эйлера

$$A \cup B \qquad A \cap B \qquad \bar{A}$$

Рис. 1. Диаграммы Эйлера операций над множествами.

Наглядно операции над множествами можно иллюстрировать, изображая множества в виде кругов — так называемых *диаграмм Эйлера*: см. рис. 1 и 2.

$$\text{а) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{б) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Рис. 2. Диаграммы Эйлера к а) 1-му закону де Моргана; б) 2-му закону дистрибутивности.

Упражнение 3. Постройте диаграммы Эйлера к 1-му закону дистрибутивности и ко 2-му закону де Моргана.

Реже используются другие операции над множествами; среди них отметим *разность* множеств $A \setminus B$ и *симметрическую разность* множеств $A \Delta B$:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap \overline{B} = \{a \mid a \in A \text{ и } a \notin B\}, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= \{a \mid a \in \text{точно одному из множеств } A \text{ и } B\}. \end{aligned}$$

Упражнение 4. Постройте диаграммы Эйлера операций \setminus и Δ .

5. Формула включений и исключений

Условимся обозначать количество элементов множества A символом $\#A$. (Иногда используется обозначение $|A|$.) Соответствующим понятием для бесконечных множеств является мощность множества.

Зададимся вопросом: как найти число элементов суммы двух или нескольких множеств, если известно число элементов каждого множества? Начнем с формулы для двух множеств:

Л е м м а 1. Если A и B — непересекающиеся множества, то

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

◁ Каждый элемент $A \cup B$ в этом случае принадлежит либо только A , либо только B . ▷

Л е м м а 2. В общем случае, для произвольных множеств A и B

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

◁ $\#A + \#B$ — число, которое получим, перечислив сначала все элементы A , а затем все элементы B . Но тогда общие элементы (их число $\#(A \cap B)$) будут перечислены дважды, т.е. $\#A + \#B = \#(A \cup B) + \#(A \cap B)$. ▷

Л е м м а 3. Для произвольного множества A в универсуме U

$$\#\bar{A} = \#U - \#A.$$

◁ Следует из законов $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = U$, откуда $\#A + \#\bar{A} = \#U$. ▷

Из доказанных лемм можно получить формулы для числа элементов суммы произвольного числа множеств.

Т е о р е м а 1. Для трех множеств A , B и C :

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#A \cap B - \#A \cap C - \#B \cap C + \#A \cap B \cap C.$$

◁ $\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C)) = \#A + \#B \cup C - \#A(B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#B \cap C - \#(A \cap B) \cup (A \cap C) = \#A + \#B + \#C - \#B \cap C - [\#A \cap B + \#A \cap C - \#(A \cap B \cap C)]$; остается только раскрыть скобки. ▷

Доказанная формула называется формулой включений и исключений, так как в ней для каждого элемента подсчитывается, сколько раз он включается и сколько исключается.

Пример (задача о плохой погоде). В августе 12 дней было холодно, 8 дней шел дождь, 4 дня дул сильный ветер, 5 дней было холодно и дождливо, 3 дня — холодно и ветрено, 2 дня — дождливо и ветрено, наконец, в 1 холодный день шел дождь и дул сильный ветер. Сколько было плохих дней в августе?

Решение (см. рис. 3). $\#A \cup B \cup C = 12 + 8 + 4 - 5 - 3 - 2 + 1 = 15$.

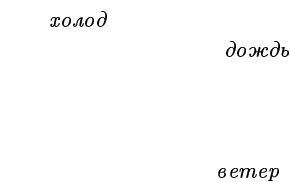


Рис. 3. Дни плохой погоды.

С л е д с т в и е. Число элементов в универсуме U , не принадлежащих ни одному из множеств A , B , C , равно

$$\#U - \#A - \#B - \#C + \#A \cap B + \#A \cap C + \#B \cap C - \#(A \cap B \cap C).$$

Пример. Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Универсум $U = [1, 100]$ состоит из 100 чисел; множество A четных чисел имеет 50 элементов; множества B и C , состоящие из чисел, кратных 3 и 5 соответственно, имеют мощности $\#B = [\frac{100}{3}] = 33$ и $\#C = [\frac{100}{5}] = 20$. (Квадратные скобки здесь обозначают целую часть

числа). Далее, множество $A \cap B$ состоит из чисел, кратных 6; множества $A \cap C$ и $B \cap C$ — кратных 10 и 15; наконец, множество $A \cap B \cap C$ — из чисел, кратных $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Таким образом, $\#A \cap B = \lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$, $\#A \cap C = \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 10$, $\#B \cap C = \lfloor \frac{100}{15} \rfloor = 6$, $\#A \cap B \cap C = \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 3$. Поэтому ответ получается вычислением $100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$.

Для четырех множеств A, B, C, D формула включений и исключений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C \cup D) = & \#A + \#B + \#C + \#D - \#A \cap B - \#A \cap C - \\ & - \#A \cap D - \#B \cap C - \#B \cap D - \#C \cap D + \#A \cap B \cap C + \\ & + \#A \cap B \cap D + \#A \cap C \cap D + \#B \cap C \cap D - \#A \cap B \cap C \cap D. \end{aligned}$$

В общем случае, для произвольного количества множеств, справедлива

Т е о р е м а 2. Если A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые множества, то

$$\begin{aligned} \#A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = & \#A_1 + \#A_2 + \dots + \#A_n - \#A_1 \cap A_2 - \\ & - \#A_1 \cap A_3 - \dots - \#A_{n-1} \cap A_n + \#A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \dots + \\ & + \#A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n + \dots + (-1)^{n-1} \#A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n. \end{aligned} \quad (*)$$

◁ Перепишем доказываемую формулу в виде:

$$\begin{aligned} \#A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = & S_1(A_1, A_2, \dots, A_n) - S_2(A_1, A_2, \dots, A_n) + \\ & + \dots + (-1)^{n-1} S_n(A_1, A_2, \dots, A_n), \end{aligned}$$

где $S_k(A_1, A_2, \dots, A_n)$ — сумма чисел $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ по всем возможным пересечениям ровно k различных множеств, выбранных среди A_1, A_2, \dots, A_n . Проведем доказательство по индукции.

Формула (*) доказана для $n = 2$. Предположим, что эта формула верна для $(n-1)$ множеств A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , и докажем ее для n множеств.

$$\begin{aligned} \#A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = & \#A_1 + \#(A_2 \cup \dots \cup A_n) - \#A_1 \cap (A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ = & \#A_1 + \#(A_2 \cup \dots \cup A_n) - \#(A_1 \cap A_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_n) = \\ = & \#A_1 + [S_1(A_2, \dots, A_n) - S_2(A_2, \dots, A_n) + \dots + \\ & + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_2, \dots, A_n)] - [S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) - \\ & - S_2(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) + \dots + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n)]. \end{aligned}$$

Сгруппируем теперь слагаемые так:

$$\begin{aligned} \#A_1 + S_1(A_2, \dots, A_n) = & \#A_1 + \#A_2 + \dots + \#A_n = S_1(A_1, A_2, \dots, A_n), \\ S_2(A_2, \dots, A_n) + S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) = & \#A_1 \cap A_2 + \dots + \\ & + \#A_1 \cap A_n + \#A_2 \cap A_3 + \dots + \#A_{n-1} \cap A_n = S_2(A_1, A_2, \dots, A_n), \end{aligned}$$

точно так же

$$S_k(A_2, \dots, A_n) + S_{k-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) = S_k(A_1, A_2, \dots, A_n),$$

наконец,

$$\begin{aligned} S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= \#A_1 \cap A_2 \cap A_1 \cap A_3 \cap \dots \cap A_1 \cap A_n = \\ &= \#A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = S_n(A_1, A_2, \dots, A_n). \quad \triangleright \end{aligned}$$

С л е д с т в и е. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые множества, U — универсум. Тогда число элементов в U , не принадлежащих ни одному из множеств A_1, A_2, \dots, A_n , равно:

$$\begin{aligned} \overline{\#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)} &= \#U - \#A_1 - \#A_2 - \dots - \#A_n + \#A_1 \cap A_2 + \\ &+ \#A_1 \cap A_3 + \dots + \#A_{n-1} \cap A_n - \dots + (-1)^n \#A_1 \cap \dots \cap A_n. \end{aligned}$$

◁ Следует из леммы 3 — достаточно взять в качестве $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ и применить формулу включения-исключения. ▷

§2. Подмножества и сочетания

1. Подмножества

Множество B называется *подмножеством* (или *частью*) множества A , если любой элемент множества B является элементом множества A . Это обозначается так: $B \subset A$. Говорят также, что B включено (содержится) в A , или что A содержит B ($A \supset B$).

Множество B называется *собственным* подмножеством (или *правильной* частью) множества A , если $B \subset A$ и B не совпадает ни с A , ни с \emptyset . Включение B в A называется в этом случае строгим.

Всегда имеют место включения: $\emptyset \subset A$, $A \subset A$, $A \subset U$.

Если задано множество A , из всех его подмножеств можно образовать новое множество $P(A)$ — множество всех подмножеств множества A (или *булеан* множества A): $P(A) = \{x \mid x \subset A\}$.

Например:

$$1) A = \{a, b\}, P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}; \#A = 2, \#P(A) = 4 = 2^2.$$

$$2) A = \{a, b, c\}, P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}; \#A = 3, \#P(A) = 8 = 2^3.$$

Закономерность, подмеченную в этих примерах: если $\#A = n$, то $\#P(A) = 2^n$, можно проверить и для других значений n : если $A = \{a\}$, то

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ состоит из 2 элементов; для $A = \emptyset$ получим $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, что соответствует формуле $2^0 = 1$.

Если множество имеет n элементов, будем называть его n -множеством; соответственно подмножество с k элементами — k -подмножеством. Множество всех k -подмножеств множества A обозначим $P_k(A) = \{x \mid x \subset A, \#x = k\}$.

Например: $A = \{a, b, c\}$, $P_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

2. Число сочетаний

Теперь нас будет интересовать такая задача: сколько k -подмножеств содержится в n -мноестве? Т.е. если $\#A = n$, чему равно $\#P_k(A)$? Обозначим решение этой задачи C_n^k . Часто k -подмножества n -мноества называют *сочетаниями* k элементов из n , поэтому символ C_n^k читается: „число сочетаний (по) k из n “. Вычислим это число. Удобно будет воспользоваться обозначением $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Т е о р е м а 1. Число всех k -подмножеств n -мноества равно

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

\triangleleft k -подмножество можно построить из $(k-1)$ -подмножества, добавляя к нему любой из остальных $(n-k+1)$ элементов n -мноества A ; $(k-1)$ -подмножеств имеется C_n^{k-1} , следовательно, можно получить таким способом $(n-k+1)C_n^{k-1}$ k -подмножеств. Но не все они будут разными, так как каждое k -подмножество можно получить k способами: добавляя один из его k элементов к тому $(k-1)$ -подмножеству, которое получено его исключением. (Например, подмножество bcd может быть получено из bc добавлением d , из bd добавлением c , из cd добавлением b .) Поэтому вычисленное нами число в k раз больше, чем число C_n^k k -подмножеств. Из $kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}$ получаем $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$, $C_n^{k-1} = \frac{n-k+2}{k-1}C_n^{k-2}$, т.е. $C_n^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}C_n^{k-2}$, и продолжая заменять C_n^i на C_n^{i-1} , получим окончательно: $C_n^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\dots(n-1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2}C_n^1$.

Остается заметить, что число 1-подмножеств $C_n^1 = n$. \triangleright

Примеры: 1) $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. 2) $C_{36}^5 = \frac{36 \cdot 35 \cdot \dots \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} = 376992$.

3) В шахматном турнире играли n участников, и каждые 2 шахматиста сыграли 1 раз. Сколько партий всего было сыграно в турнире? Ответ: $C_n^2 = n(n-1)/2$.

4) Диагонали выпуклого n -угольника расположены так, что никакие 3 из них не пересекаются в одной точке, отличной от вершины. Сколько имеется точек пересечения диагоналей?

Решение. Обозначим искомое число d_n . Ясно, что $d_3 = 0$, $d_4 = 1$, $d_5 = 5$. Далее будем рассуждать так. Каждой точке пересечения однозначно соответствует пара диагоналей, пересекающихся в ней, а каждой диагонали — пара вершин многоугольника (рис. 4). Чтобы получить точку пересечения, надо выбрать 4 вершины из n . Следовательно, точек пересечения диагоналей столько же, сколько сочетаний по 4 из n вершин, т.е. $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Для 7-угольника это $C_7^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$.

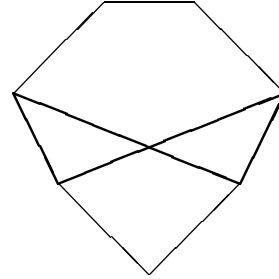


Рис. 4

3. Свойства чисел сочетаний

Свойство 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (число k -подмножеств в n -множестве совпадает с числом $(n-k)$ -подмножеств того же множества.)

$\triangleleft C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$; но возможно и другое доказательство: установим взаимно однозначное соответствие между элементами множества $P_k(A)$ и $P_{n-k}(A)$, где $\#A = n$, следующим образом: если $x \in P_k(A)$, то $\bar{x} \in P_{n-k}(A)$, и наоборот, если $x \in P_{n-k}(A)$, то $\bar{x} \in P_k(A)$. (Имеется в виду: x — подмножество множества A , \bar{x} — его дополнение в A .) Следовательно, у этих множеств одинаковое количество элементов: $\#P_k(A) = \#P_{n-k}(A)$. \triangleright

Свойство 2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

\triangleleft Первый способ доказательства такой же, как и свойства 1:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}[k + (n-k)] = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \end{aligned}$$

Другой способ. Пусть A — n -элементное множество, $a \in A$. Все k -подмножества разобьем на 2 группы: подмножества, содержащие a , и подмножества, не содержащие a . Число подмножеств в 1-й группе равно C_{n-1}^{k-1} , так как каждое такое подмножество получено присоединением элемента a к некоторому $(k-1)$ -подмножеству $(n-1)$ -множества $A \setminus \{a\}$; во 2-й группе будет C_{n-1}^k элементов, так как каждое такое подмножес-

тво есть k -подмножество $(n - 1)$ -множества $A \setminus \{a\}$. Таким образом,
 $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. \triangleright

- Примеры. 1) $C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ (по свойству 1).
 2) $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$; $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$ (по свойству 1).

4. Треугольник Паскаля

Из свойства 2 вытекает следующий простой способ вычисления значений C_n^k :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

Последовательно вычисляем значения всех C_n^k с фиксированным нижним индексом n , сначала для $n = 1$, затем для $n = 2, 3$, и т.д., образуя из значений C_n^k с одинаковым n строку треугольника.

Каждое число в треугольнике получается сложением двух чисел, стоящих непосредственно выше него (кроме крайних чисел в каждой строке, которые равны 1). Этот треугольник носит название треугольника Паскаля (или арифметического треугольника).

С помощью треугольника Паскаля можно доказать еще несколько свойств чисел C_n^k .

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$

\triangleleft Каждое число, стоящее в n -й строке, является суммой двух чисел, стоящих выше (в $(n - 1)$ -й строке): $C_n^0 = C_{n-1}^0$, $C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2$, $C_n^4 = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4$, \dots , откуда получим

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + (C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4) + \dots$$

Точно так же $C_n^1 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1$, $C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$, $C_n^5 = C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5$, \dots , и

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + (C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5) + \dots$$

Обе суммы равны, что и требовалось доказать. \triangleright

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

\triangleleft Введем обозначение $S_n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$. Заметим, что из доказательства свойства 3 следует $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = S_{n-1}$. Тогда $S_n = (C_n^0 + C_n^2 + \dots) + (C_n^1 + C_n^3 + \dots) = 2S_{n-1}$, т.е. $S_n = 2S_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot S_{n-2} = \dots = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots}_n \cdot S_0 = 2^n$ (поскольку $S_0 = 1$). \triangleright

Теорема 2. Число всех подмножеств n -множества A равно 2^n : $\#P(A) = 2^{\#A}$. (Поэтому иногда множество $P(A)$ обозначают 2^A .)

◁ Булеан $P(A)$ представляется в виде объединения непересекающихся классов $P(A) = P_0(A) \cup P_1(A) \cup P_2(A) \cup \dots \cup P_n(A)$, и утверждение теоремы вытекает из свойства 4, так как

$$\begin{aligned} \#P(A) &= \#P_0(A) + \#P_1(A) + \#P_2(A) + \dots + \#P_n(A) = \\ &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Пример. Для множества $A = \{a, b, c\}$ будем иметь $P_0(A) = \{\emptyset\}$, $P_1(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $P_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $P_3(A) = \{A\}$; числа элементов этих множеств суть 1, 3, 3, 1, что составляет 4-ю строку арифметического треугольника.

5. Метод путей

Проиллюстрируем этот метод на примере решения следующей задачи.

Задача. Рассмотрим прямоугольную сетку в декартовой системе координат на плоскости Oxy , состоящую из линий $x = 0, 1, \dots, m$; $y = 0, 1, \dots, n$. Чему равно число кратчайших путей, ведущих по отрезкам этой сетки из точки $(0, 0)$ в точку (m, n) ? Иначе говоря, сколько имеется способов достичь из точки $O(0, 0)$ точку $P(m, n)$, двигаясь только вправо и вверх (см. рис. 5)?

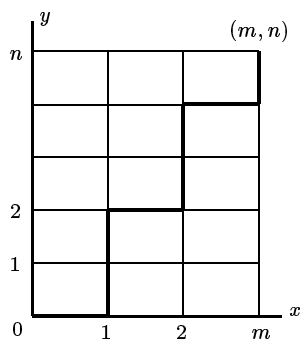


Рис. 5

Решение. Каждый кратчайший путь состоит из $m + n$ отрезков единичной длины, причем среди них m горизонтальных и n вертикальных. Разные пути отличаются порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков; поэтому общее число путей равно числу способов, которыми можно выбрать n вертикальных отрезков из общего числа $m + n$ отрезков, т.е. C_{m+n}^n .

Вместо вертикальных можно было бы выбрать m горизонтальных отрезков, тогда получилось бы C_{m+n}^m , откуда следует $C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$, что равносильно $C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство 1).

Проведем с помощью этого метода еще одно, третье доказательство свойства 2.

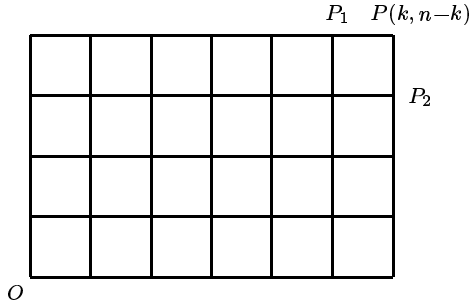


Рис. 6

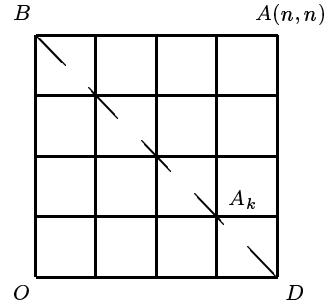


Рис. 7

$\triangleleft C_n^k = C_{k+(n-k)}^k =$ числу кратчайших путей из начала $O(0, 0)$ в точку $P(k, n - k)$. В точку P можно попасть, лишь минуя точку P_1 или P_2 (см. рис. 6), причем все пути, ведущие в P , разбиваются на 2 непересекающихся подмножества: идущие сначала в P_1 , а затем из P_1 в P ; и пути, идущие сначала в P_2 . Так как координаты промежуточных точек $P_1(k - 1, n - k)$, $P_2(k, n - k - 1)$, получим $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. \triangleright

Свойство 5. $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

$\triangleleft C_{2n}^n$ равно числу кратчайших путей из точки $O(0, 0)$ в точку $A(n, n)$ (см. рис. 7). Каждый путь проходит через одну из точек $A_k(k, n - k)$, лежащих на диагонали BD квадрата $OBAD$. Число путей из O в A_k равно C_n^k , число путей из A_k в A в силу симметрии такое же; поэтому число путей из O в A , проходящих через точку A_k , равно $(C_n^k)^2$; общее количество путей получится суммированием по всем $k \in [0, n]$. \triangleright

§3. Упорядоченные множества и размещения

1. Порядок

Пусть A — некоторое множество и относительно любой пары его элементов a и b можно сказать $a \preceq b$ (a предшествует b) или $a \not\preceq b$ (a не предшествует b). Кроме того, пусть выполнены следующие свойства, распространяющиеся на любые $a, b, c \in A$:

- 1) $a \preceq a$ (рефлексивность);
- 2) $a \preceq b$ и $b \preceq a$ влечет $a = b$ (антисимметричность);
- 3) $a \preceq b$ и $b \preceq c$ влечет $a \preceq c$ (транзитивность).

Тогда говорят, что на A определен *частичный порядок*, а само множество A называется *частично упорядоченным* множеством. Часто вместо знака \preceq используется другой символ, а понятие предшествования наполняется конкретным содержанием.

Например, если m и n целые числа, условимся писать $m \mid n$, когда m делит n ; тогда для элементов множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ справедливо: $1 \mid 1, 1 \mid 2, 1 \mid 3, 1 \mid 4, 2 \mid 2, 2 \mid 4, 3 \mid 3, 4 \mid 4$. Очевидно, выполнены все три свойства ($a \mid a; a \mid b, b \mid a \implies a = b; a \mid b, b \mid c \implies a \mid c$), поэтому отношение „ m делит n “ является *частичным порядком* на множестве A (и даже на множестве всех натуральных чисел).

Если выполнено еще свойство

4) для любых $a, b \in A : a \preceq b$ или $b \preceq a$ (*дихотомия*),

то говорят, что на множестве A определен *линейный порядок*, а само множество A называется *упорядоченным*. В этом случае сравнимы любые два элемента из A . Пример линейного порядка — обычное отношение \leq на множестве целых (или вещественных) чисел.

Знак \preceq может быть перевернут: если $a \preceq b$ (a „предшествует“ b), то пишут также $b \succcurlyeq a$ (b „следует за“ a); для отношения делимости — $m \mid n$ (m делит n) эквивалентно записи $n : m$ (n делится на m). Иногда отбрасывают черточку вниз: если $a \preceq b$, но $a \neq b$, то пишут $a \prec b$ (a „строго предшествует“ b) или $b \succ a$ (b „строго следует за“ a); в этом случае говорят, что определен *строгий порядок* \prec . Иначе *строгий порядок* можно определить, потребовав соблюдения следующих свойств, распространяющихся на любые $a, b, c \in A$:

- 1) $a \not\prec a$ (нерефлексивность);
- 2) $a \prec b$ влечет $b \not\prec a$ (несимметричность);
- 3) $a \prec b$ и $b \prec c$ влечет $a \prec c$ (транзитивность).

Если выполнено еще 4-ое свойство:

4) для любых $a, b \in A$ имеет место одно из трех: $a \prec b, b \prec a$ или $a = b$ (*трихотомия*),

то говорят, что \prec — *строгий линейный порядок*.

Упражнение 1. Проверьте, что отношение $<$ на множестве целых (или вещественных) чисел является строгим линейным порядком.

2. Диаграммы Хассе

У конечного упорядоченного n -множества A все его элементы можно перенумеровать числами из отрезка $[1, n]$: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, так, чтобы $a_i \preceq a_j \iff i \leq j$. Все элементы при этом выстраиваются в

линейную цепочку, наглядно изображающую упорядоченное множество A и называемую диаграммой Хассе (рис. 8).

Каждый элемент на этой диаграмме представляется точкой; точки соединяются линиями; если из одной точки идет путь в другую, следующий все время в определенном направлении (например, вправо), то первая точка считается предшествующей второй точке.

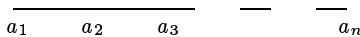


Рис. 8. Диаграмма Хассе.

Для частично упорядоченных множеств диаграммы Хассе оказываются более сложными.

Примеры. 1. Диаграммы Хассе для множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, упорядоченных отношением „делит“, изображены на рис. 9.



Рис. 9. Диаграмма Хассе отношения „делит“: а) на множестве $[1, 4]$; б) на множестве $[1, 8]$.

2. Диаграммы Хассе для множеств $P(\{a, b\})$ и $P(\{a, b, c\})$ с отношением включения \subset в качестве частичного порядка — на рис. 10.

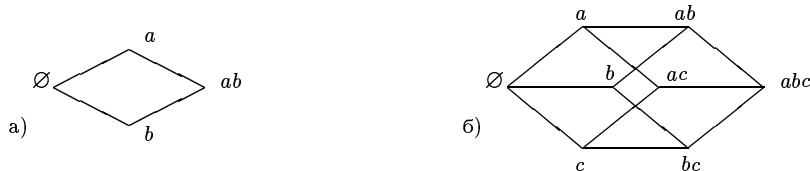


Рис. 10. Диаграмма Хассе отношения включения: а) для множества $P(\{a, b\})$; б) для множества $P(\{a, b, c\})$.

Упражнение 2. Начертите диаграмму Хассе для множества $P(\{a, b, c, d\})$ с частичным порядком \subset .

3. Перестановки. Число перестановок

Пусть A — конечное множество, $\#A = n$. Если на A задан линейный порядок \preceq , то соответствующее упорядоченное множество будем обозначать A . Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Даже если все

элементы одни и те же: a_1, a_2, \dots, a_n , но различен их порядок \preccurlyeq_1 и \preccurlyeq_2 , то упорядоченные множества A_1 и A_2 различны. Будем обозначать упорядоченные множества с указанием следования их элементов в круглых скобках: $A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $A_2 = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$.

Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, а сами элементы берутся из одного и того же множества A , называются перестановками множества A .

Пример: перестановки множества $A = \{a, b, c\}$ суть (a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , (c, b, a) .

Все перестановки множества A образуют множество, называемое симметризатором множества A :

$$S(A) = \{A \mid \preccurlyeq \text{ — линейный порядок на } A\}.$$

Число всех перестановок n -множества обозначается P_n ; таким образом, если $\#A = n$, то $\#S(A) = P_n$.

Т е о р е м а 1. $P = n!$.

◁ Будем последовательно выбирать элементы множества A и размещать их в линейном порядке на n местах: сначала на 1-ое место, затем на 2-ое, и т.д. На 1-ое место можно поставить любой из n элементов; после того, как 1-ое место заполнено, останется $(n - 1)$ элементов, так что 2-ое место может быть занято любым из этих $(n - 1)$ элементов; на 3-е место останется $(n - 2)$ элементов-кандидатов и т.д. Следовательно, имеется $n(n - 1)(n - 2) \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ способов упорядочить множество A . ▷

Задачи. 1. Найти $\#S(A)$, если $\#A = 4$. Ответ: $P = 4! = 24$.

1а. Сколько способов разместить на полке 4 книги? Ответ: $P = 24$.

1б. Сколько слагаемых в определителе 4 порядка? Ответ: каждое слагаемое соответствует перестановке чисел 1,2,3,4, поэтому всего слагаемых $P = 24$.

2. Сколькими возможными способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \dots, 2n\}$, чтобы каждое четное число имело четный номер?

◁ Четные числа ставятся на четные места, нечетные — на нечетные, стало быть, подмножества $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ и $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ упорядочиваются отдельно; и в том, и в другом случае имеется $n!$ способов; общее число перестановок равно $n! \cdot n! = (n!)^2$. ▷

3. Сколькими способами можно рассадить n гостей за круглым столом (рис. 11)? Ответ: $n!$.

За. Сколькими способами можно расставить n чисел $1, 2, \dots, n$ по окружности?

◁ Так как расстановки чисел не различаются, если повернуть окружность вокруг центра или если перевернуть ее относительно диаметра, то ответом будет $n!/(n \cdot 2) = (n - 1)!/2$. ▷

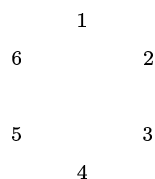


Рис. 11

4. Принцип произведения

В доказательстве теоремы 1 и при решении задачи 2 использовались следующие соображения:

(в двукратном выборе) *Если некоторый выбор A можно осуществить t различными способами, и для любого из этих способов некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B в указанном порядке можно осуществить $t \cdot n$ способами.*

Задача 1. В шахматном турнире 10 участников. Сколькими способами могут быть распределены 1-ое и 2-ое места? Ответ: $10 \cdot 9$.

Задача 2. Чему равно количество двузначных четных чисел?

◁ Первая цифра может быть выбрана 9 способами, вторая — 5 способами, поэтому ответ таков: $9 \cdot 5 = 45$. ▷

(в общем случае) *Если требуется выполнить одно за другим k действий, причем 1-ое может быть выполнено n_1 способами, 2-ое — n_2 способами, и т.д., k -ое — n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.*

Задача 3. Найти число 4-значных чисел, у которых все цифры различны.

◁ Первая цифра может быть выбрана 9 способами, вторая — также 9 способами, третья — 8 способами, четвертая — 7 способами.

Ответ: $9^2 \cdot 8 \cdot 7 = 4456$. ▷

5. Число размещений

Число всех неупорядоченных k -подмножеств n -множества, как мы знаем, равно C_n^k и называется числом сочетаний k из n .

Рассмотрим теперь задачу о подсчете упорядоченных k -подмножеств n -множества A . Все такие подмножества образуют множество

$$S_k(A) = \{B \mid B \subset A, \#B = k, \preceq \text{ — линейный порядок на } B\}.$$

Обозначим $A_n^k = \#S_k(A)$ и будем называть эту величину числом размещений k из n .

Т е о р е м а 2. $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = k! \cdot C_n^k$.

◁ 1-й способ доказательства. Построение упорядоченного k -подмножества n -множества можно произвести следующим образом. Выберем первый элемент одним из n возможных способов, затем второй элемент — для него найдется $(n-1)$ способов выбора, и т.д.; наконец, для k -го элемента останется $(n-k+1)$ способов. Таким образом, по принципу произведения получаем $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

▷ 2-й способ доказательства. Сначала выберем неупорядоченное k -подмножество, а затем упорядочим его. Каждое из C_n^k неупорядоченных k -подмножеств можно упорядочить $k!$ способами; поэтому $A_n^k = k! \cdot C_n^k$. ▷

Пример. Решение задачи 3 предыдущего пункта может быть записано так: $A_9^4 = A_9^3$.

Упражнение 3. В клубе 15 членов. Из их числа избираются президент клуба, секретарь и казначей. Сколько существует способов избрания?

§4. Отображения

1. Способы задания отображений

Отображение множества A в множество B — это соответствие, при котором каждому элементу $a \in A$ сопоставляется однозначно определенный элемент $b \in B$. Элемент b называется *образом* элемента a , элемент a — *прообразом* элемента b . Если φ — отображение множества A в B , то используется запись $\varphi : A \rightarrow B$ или $A \xrightarrow{\varphi} B$; сопоставление элементу $a \in A$ его образа $b \in B$ при отображении φ обозначается так: $\varphi(a) = b$ или $\varphi : a \mapsto b$.

Существует несколько способов задания отображения: описательно, с помощью таблиц, графиков, и стрелочных схем.

Табличное задание отображения (рис. 12) общеизвестно и не нуждается в комментариях. Одно замечание: если множество A конечно, таблица оказывается конечной, и ее можно изобразить в упрощенной форме $\varphi =$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

x	a_1	a_2	\dots
$\varphi(x)$	$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	\dots

Рис. 12. Таблица отображения.

Графически отображение задается таким образом: проведем два взаимно перпендикулярных луча, на один из них нанесем точки, соответствующие элементам множества A , на другой — точки-элементы множества B ; затем из этих точек восстановим перпендикуляры к лучу, на котором они лежат, и отметим точки пересечения соответствующих линий (рис. 13). Заметим, что на каждой вертикальной линии (если луч, соответствующий множеству B , располагается вертикально) будет отмечена ровно 1 точка.

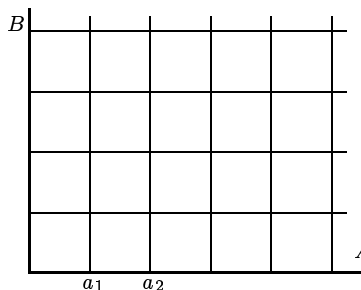


Рис. 13. График отображения.

Рассмотрим еще задание отображения с помощью стрелочной схемы. Элементы множеств A и B изображаются различными точками плоскости: для A — слева, для B — справа, а соответствующие при отображении φ точки соединяются стрелкой слева направо (рис. 14). Из каждой точки-элемента множества A будет исходить в точности 1 стрелка.

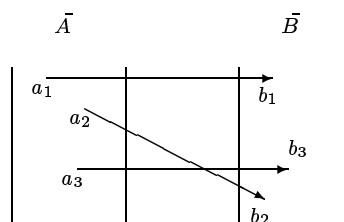


Рис. 14. Стрелочная схема.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\tau : A \rightarrow B$ — отображение, заданное правилом: $\tau(a) =$ число делителей a . Графические представления отображения τ изображены на рис. 15.

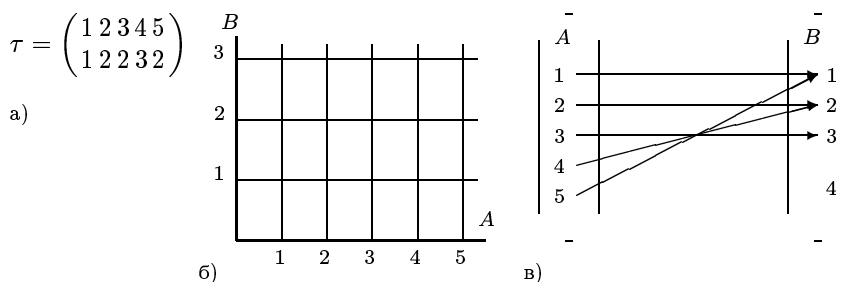


Рис. 15. Представление отображения: а) подстановкой; б) графиком; в) схемой.

Т е о р е м а 1. Число всех отображений конечного m -множества A в конечное n -множество B равно n^m .

$\triangleleft \#A = m, \#B = n$; образ $\varphi(a_1)$ можно выбрать n способами, так как им может быть любой элемент множества B ; $\varphi(a_2)$ — также n способами, и т.д.; по принципу произведения получим $\#\{A \rightarrow B\} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_m$.

(Здесь $\{A \rightarrow B\}$ обозначает множество всех отображений из A в B ; часто используется также обозначение B^A .) \triangleright

2. Инъекция

Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным* отображением (*инъективным* отображением, или *инъекцией*), если разным элементам множества A соответствуют при этом отображении разные образы, т.е. $a_1 \neq a_2 \implies \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$ для любых $a_1, a_2 \in A$. При обозначении инъекции стрелка видоизменяется: $A \xrightarrow{\varphi} B$.

Пример. Инъекцией является отображение φ из множества \mathbb{Z} всех целых чисел в множество $2\mathbb{Z}$ всех четных чисел, $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}, a \mapsto 8a$.

Инъективные отображения при их изображении характеризуются следующим:

- 1) в нижней строке таблицы каждый элемент множества B встречается не более 1 раза;
- 2) на любой горизонтальной прямой графика отмечено не более 1 точки (рис. 16, а);
- 3) на схеме в каждую точку множества B входит не более 1 стрелки (рис. 16, б).

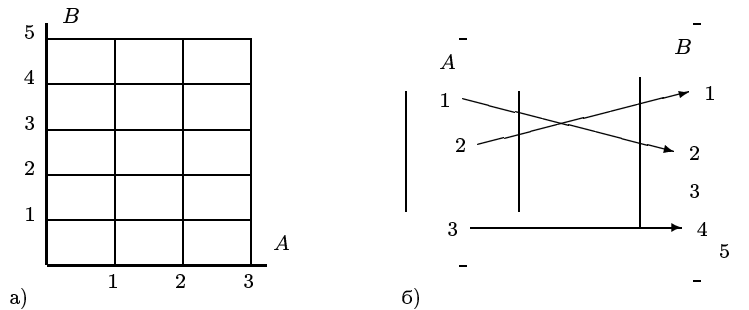


Рис. 16. Инъективное отображение: а) график; б) схема.

Эти замечания могут быть сформулированы в виде предложения.

Предложение 1. При инъективном отображении $\varphi : A \rightarrow B$ любой элемент $b \in B$ имеет не более одного прообраза.

◁ Если бы у элемента b существовало 2 различных прообраза $a_1 \neq a_2$, то $\varphi(a_1) = b$ и $\varphi(a_2) = b$, что противоречит определению инъекции. ▷

Предложение 2. Если существует инъекция из A в B , и множества A, B конечны, то $\#A \leq \#B$.

◁ Следует из предложения 1. ▷

3. Сюръекция

Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется отображением на B (сюръективным отображением, или сюръекцией), если у любого элемента множества B имеется хотя бы один прообраз, т.е. для любого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $\varphi(a) = b$. Сюръекция также обозначается с помощью специальной стрелки: $A \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} B$.

Пример. Пусть $A = \mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $B = \mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных вещественных чисел. Сюръекцией будет отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$. (Для любого $y \in \mathbb{R}^+$ в качестве прообраза можно взять $x = \sqrt{y}$).

Сюръекции при их изображении характеризуются следующим:

- 1) в нижней строке таблицы встречаются все элементы множества B ;
- 2) на любой горизонтальной прямой графика отмечено не менее 1 точки (рис. 17, а);
- 3) на схеме в каждую точку множества B входит хотя бы 1 стрелка (рис. 17, б).

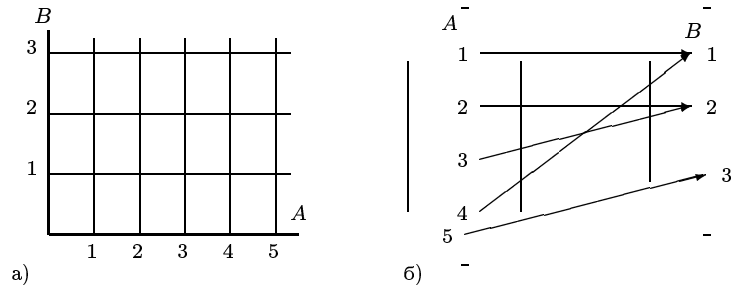


Рис. 17. Сюръективное отображение: а) график; б) схема.

Все это соответствует определению, согласно которому при сюръективном отображении $\varphi : A \rightarrow B$ любой элемент $b \in B$ имеет не менее одного прообраза. Отсюда следует

Предложение 3. Если существует сюръекция из A на B , и множества A, B конечны, то $\#A \geq \#B$.

4. Биекция

Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным* отображением на все множество B (*биективным* отображением, или *биекцией*), если φ является одновременно инъективным и сюръективным отображением. (Обозначается: $A \xleftrightarrow{\varphi} B$.)

У каждого элемента $a \in A$ при биективном отображении существует единственный образ $\varphi(a) \in B$, и, наоборот, каждому элементу $b \in B$ соответствует единственный прообраз, обозначаемый $\varphi^{-1}(b)$. Очевидно, что соответствие $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$, $b \mapsto \varphi^{-1}(b)$ также является биективным отображением. Оно называется обратным отображением по отношению к φ .

Примеры. 1) $\varphi : \mathbb{Z} \leftrightarrow 2\mathbb{Z}$, $a \mapsto 2a$;

2) $\varphi : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ (\mathbb{R}^+ — множество положительных вещественных чисел), обратное отображение $\varphi^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Упражнение 1. Выберите область определения и область значений отображения $x \mapsto \sin x$ так, чтобы оно оказалось а) инъективным; б) сюръективным; в) биективным.

Т е о р е м а 2. (а) Число всех биекций n -множества A на n -множество B равно $n!$. (б) Число всех инъекций m -множества A в n -множество B равно $A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$.

(Напомним, что символом A_n^m обозначается число размещений m из n .)

◁ (б): образ $\varphi(a_1)$ можно выбрать n способами, образ $\varphi(a_2)$ — $(n-1)$ способами, и т.д., до $\varphi(a_m)$, выбираемого $(n-m+1)$ способами. (а) вытекает из (б), так как $A_n^n = n!$. ▷

В случае биекции предложения 2 и 3 дают следующее важное следствие:

Если существует биекция $\varphi : A \leftrightarrow B$, и множества A и B конечны, то $\#A = \#B$.

Принцип биекции часто используется, чтобы установить равенство мощностей двух множеств — достаточно построить какую-либо биекцию между ними. Докажем таким способом формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

◁ Пусть $\#A = n$, тогда $C_n^k = \#P_k(A)$, $C_n^{n-k} = \#P_{n-k}(A)$. Построим биекцию $\varphi : P_k(A) \leftrightarrow P_{n-k}(A)$. Если $T \in P_k(A)$, то T состоит из k элементов, а $A \setminus T$ будет состоять из $(n-k)$ элементов. Положим $\varphi(T) = A \setminus T$. Очевидно, что φ (дополнение множества T в множестве A) является биекцией. Согласно принципу биекции $\#P_k(A) = \#P_{n-k}(A)$. ▷

5. Разложения целых чисел

В качестве еще одного применения принципа биекции рассмотрим следующую задачу:

Сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ (где n, k — заданные целые положительные числа)?

Каждое такое решение называется *разложением* числа n .

Сформулируем определение иначе: разложением числа n называется представление n в виде упорядоченной суммы положительных целых.

Пример. Существует 8 разложений числа 4: $1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 3+1, 1+3, 2+2, 4$.

Упражнение 2. Найдите все разложения числа 5.

Разложение числа n , содержащее k слагаемых, называется k -разложением n . Обозначим множество всех k -разложений n через $R_k(n)$.

Т е о р е м а 3. Число всех k -разложений n равно C_{n-1}^{k-1} .

◁ Определим отображение $\theta : R_k(n) \rightarrow P_{k-1}([1, n-1])$, где $[1, n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$, по правилу: если $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ — k -разложение числа n , то $\theta(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}\}$. Так как все $a_i > 0$, получаем $k-1$ различных элементов отрезка $[1, n-1]$: $1 \leq a_1 < a_1 + a_2 < \dots < a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} \leq n-1$.

Докажем, что θ — инъекция. Если $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ и $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k$ — два различных k -разложения числа n , то, даже если $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2$, найдется первый индекс i такой, что $a_i \neq a'_i$. Тогда $a_1 + a_2 + \dots + a_i \neq a'_1 + a'_2 + \dots + a'_i$.

Докажем теперь, что θ — сюръекция. С помощью θ можно получить любое $(k-1)$ -подмножество отрезка $[1, n-1]$, а именно подмножество $\{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$ при условии $b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1}$ получается из разложения $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n, a_1 = b_1, a_2 = b_2 - b_1, \dots, a_k = n - b_{k-1}$.

Итак, θ — биекция, и из принципа биекции заключаем $\#R_k(n) = \#P_{k-1}([1, n-1]) = C_{n-1}^{k-1}$. ▷

Пример. Число всех 3-разложений 4 равно $C_3^2 = 3$ (ср. с предыдущим примером).

С л е д с т в и е 1. Число всех разложений числа n равно 2^{n-1} .

◁ Так как множество всех разложений числа n можно представить в виде объединения непересекающихся множеств, состоящих из k -разложений при различных $k \in [1, n]$: $R(n) = R_1(n) \cup R_2(n) \cup \dots \cup R_n(n)$, то $\#R(n) = \#R_1(n) + \#R_2(n) + \dots + \#R_n(n) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$. ▷

Пример. Имеется в точности $2^{4-1} = 8$ разложений числа 4.

k -разложение числа n схематично изображают, рисуя в строку n точек и $(k-1)$ разделяющих их вертикальных черточек. Например, разложение $1+2+1+1+3+2$ числа 10 может быть изображено так:

$$\cdot \mid \cdot \cdot \mid \cdot \mid \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \cdot \cdot ;$$

образом этого разложения при отображении θ является 5-подмножество $\{1,3,4,5,8\}$ множества $[1,9]$. Всего имеется C_9^5 разложений числа 10 на 6 слагаемых.

6. Уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

Разложения целых чисел можно трактовать как решения уравнений вида

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad (1)$$

в положительных целых числах.

Т е о р е м а 4. Число всех решений уравнения (1) в положительных целых числах равно C_{n-1}^{k-1} ; в неотрицательных целых числах равно C_{n+k-1}^{k-1} .

◁ Первое утверждение вытекает из теоремы 3. Второе утверждение может быть выведено из первого. Для этого поставим в соответствие каждому решению x_1, x_2, \dots, x_k ($x_i \geq 0$) уравнения (1) решение y_1, y_2, \dots, y_k ($y_i > 0$) уравнения $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n + k$ по правилу $y_i = x_i + 1$. Это соответствие, очевидно, является биекцией; так что остается воспользоваться принципом биекции. ▷

Пример. Уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ имеет $C_4^2 = 6$ положительных целых решений и $C_7^2 = 21$ неотрицательных целых решений. Дополнительными решениями, содержащими 0, будут: 6 решений вида $4+1+0$, 6 решений вида $3+2+0$ и 3 решения вида $5+0+0$.

С л е д с т в и е 2. Число всех решений неравенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n \quad (2)$$

в неотрицательных целых числах равно C_{n+k}^k .

◁ Добавим еще одно неотрицательное целое неизвестное x_{k+1} , равное $n - (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$, так что теперь вместо неравенства будем иметь уравнение вида (1), но с $k+1$ неизвестным. ▷

Упражнение 3. Определите число всех решений неравенства (2) в положительных целых числах.

§5. Мультимножества

1. Определение

Понятие мультимножества можно объяснить так: это множество с повторяющимися элементами, например, $M_1 = \{1, 1, 1, 2, 5, 5\}$, $M_2 = \{a, c, c, c, c, d, e, e\}$. Дадим строгое определение.

Пусть S — некоторое множество; *мультимножеством* M на множестве S называется функция $\nu : S \rightarrow N$ (из множества S в множество натуральных чисел).

Значение $\nu(x)$ показывает, сколько раз элемент $x \in S$ включается в M : это может быть 0, 1 и большее число. Если $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, число $\#M = \nu(x_1) + \nu(x_2) + \dots + \nu(x_n)$ называется мощностью мультимножества M . В первом из рассмотренных выше примеров

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \#M_1 = \nu_1(1) + \dots + \nu_1(5) = 6,$$

а во втором:

$$S_2 = \{a, b, c, d, e\}, \nu_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \#M_2 = \nu_2(a) + \dots + \nu_2(e) = 8.$$

Таким образом, мультимножества всегда строятся на каком-то множестве, как на фундаменте: элементы M выбираются из числа элементов множества S , но возможны повторения. Множество S называется *носителем* мультимножества M .

Если

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \nu(x_i) = a_i, \text{ т.е. } \nu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

то часто используют обозначение $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n}\}$, например, $M_1 = \{1^3, 2^1, 3^0, 4^0, 5^2\}$. Можно пропускать элементы с верхним индексом 0, так как они не принадлежат мультимножеству, и опускать верхний индекс 1: $M_1 = \{1^3, 2, 5^2\}$; $M_2 = \{a, c^4, d, e^2\}$. Похожая запись используется в разложении целого числа на множители: $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

2. Действия над мультимножествами.

Пересечение мультимножеств $M_1 \cap M_2$ есть мультимножество M , для которого функция ν строится по соответствующим M_1 и M_2 функциям ν_1 и ν_2 следующим образом:

$$\nu(x) = \min(\nu_1(x), \nu_2(x)), \quad x \in M,$$

например, $\{1^3, 2, 5^2\} \cap \{1^2, 2^2, 4^3, 5\} = \{1^2, 2, 5\}$.

Объединение мультимножеств $M_1 \cup M_2$ определяется аналогично, как мультимножество M с функцией

$$\nu(x) = \max(\nu_1(x), \nu_2(x)), \quad x \in M,$$

например, $\{1^3, 2, 5^2\} \cup \{1^2, 2^2, 4^3, 5\} = \{1^3, 2^2, 4^3, 5^2\}$.

Эти две операции над мультимножествами удовлетворяют таким же законам, что и соответствующие операции над множествами; а именно законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Докажем один из законов дистрибутивности:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3).$$

◁ Левая часть определяется функцией $\nu = \max(\nu_1, \min(\nu_2, \nu_3))$, правая — функцией $\mu = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \max(\nu_1, \nu_3))$, причем ради краткости будем опускать аргумент x в $\nu(x)$, $\nu_1(x)$, и т.д.

Рассмотрим последовательно два случая:

1) ν_1 больше ν_2 и ν_3 ; тогда $\mu = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \max(\nu_1, \nu_3)) = \nu_1$, $\nu = \max(\nu_1, \min(\nu_2, \nu_3)) = \nu_1$, т.е. $\mu = \nu$;

2) ν_1 не больше ν_2 или ν_3 ; для определенности предположим, что наибольшим из трех чисел является ν_3 . Вычисляя μ и ν , получим $\mu = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \max(\nu_1, \nu_3)) = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \nu_3) = \max(\nu_1, \nu_2)$; $\nu = \max(\nu_1, \min(\nu_2, \nu_3)) = \max(\nu_1, \nu_2)$, так что и в этом случае оказывается $\mu = \nu$. ▷

Упражнение 1. Докажите другой закон дистрибутивности.

Упражнение 2. Исследуйте возможность определения операций разности и дополнения для мультимножеств.

Отметим, что симметрическую разность можно определить с помощью функции $\nu(x) = |\nu_1(x) - \nu_2(x)|$.

3. Простые числа и разложение на множители

Здесь мы рассмотрим пример применения понятий, введенных в этом и предыдущих пунктах, к арифметике.

Простым числом называется натуральное число, большее 1, которое делится только на 1 и на себя. Первые простые числа : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... Каждое натуральное число можно разложить на простые множители: $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$. Если на множестве натуральных чисел \mathbb{N} задать отношение частичного порядка: $a \preccurlyeq b$, если $a \mid b$, то каждому простому числу строго предшествует только 1 (рис. 18).

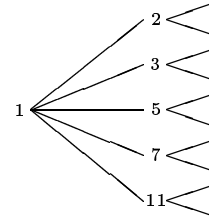


Рис. 18.

Числа, большие 1 и не являющиеся простыми, относятся к составным. Таковы все четные, кроме 2; все кратные 3, кроме самой 3; все кратные 5, кроме 5 и т.д. Отсюда вытекает способ выделения простых чисел из некоторого начального отрезка натурального ряда, например, из множества первых 40 чисел (решето Эратосфена):

$\underline{2} \quad \underline{3} \quad \cancel{4} \quad \underline{5} \quad \cancel{6} \quad 7 \quad \cancel{8} \quad \cancel{9} \quad \underline{10} \quad 11 \quad \cancel{12} \quad 13 \quad \cancel{14} \quad \cancel{15} \quad \underline{16} \quad 17 \quad \cancel{18} \quad 19 \quad \underline{20}$
 $\cancel{21} \quad \cancel{22} \quad \underline{23} \quad \cancel{24} \quad \cancel{25} \quad \underline{26} \quad \cancel{27} \quad \cancel{28} \quad \cancel{29} \quad \cancel{30} \quad \cancel{31} \quad \cancel{32} \quad \cancel{33} \quad \cancel{34} \quad \cancel{35} \quad \cancel{36} \quad \cancel{37} \quad \cancel{38} \quad \cancel{39} \quad \underline{40}$

Достаточно, очевидно, остановиться на наибольшем простом числе, не превосходящем $\sqrt{40}$, т.е. 5, так как следующее простое число 7, если и является делителем некоторого числа $n \leq 40$, то $n = 7k$ и другой делитель k обязательно меньше $\frac{40}{7} < 6$.

Задача: подсчитать количество простых чисел в $[2, 100]$, не пользуясь решето Эратосфена.

◁ Будем использовать метод включения-исключения. Искомое число N равно $(S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4) + 4$, где $S_0 = \#[2, 100] = 99$, S_1 равно сумме количества четных чисел, количества кратных 3, количества кратных 5 и количества кратных 7, т.е.

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{7} \right] = 117; \\
 S_2 &= \left[\frac{100}{2 \cdot 3} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 5} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 7} \right] + \left[\frac{100}{3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{100}{3 \cdot 7} \right] + \left[\frac{100}{5 \cdot 7} \right] = 45; \\
 S_3 &= \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right] + \left[\frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right] = 6; \quad S_4 = 0;
 \end{aligned}$$

окончательно находим $N = (99 - 117 + 45 - 6) + 4 = 25$. ▷

Поставим в соответствие каждому натуральному n мультимножество M_n , состоящее из его простых множителей, причем каждый множитель повторяем требуемое количество раз: $M_2 = \{2\}$, $M_{10} = \{2, 5\}$, $M_{54} = \{2, 3^3\}$, так как $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Будем считать $M_1 = \emptyset$. Обозначим \mathbb{P} множество всех простых чисел. Отображение $n \mapsto M_n$ является биекцией множества \mathbb{N} на множество всех мультимножеств с носителем \mathbb{P} .

Действительно, разложение любого числа n на простые множите-

ли $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ однозначно определяет мультимножество $M_n = \{p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_k^{a_k}\}$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $M_a \cap M_b = M_c$, где число c — наибольший общий делитель a и b : $c = \text{НОД}(a, b)$. Точно так же $M_a \cup M_b = M_d$, где $d = \text{НОК}(a, b)$ — наименьшее общее кратное a и b . Например, если $a = 54$, $b = 300$, то $M_a = \{2, 3^3\}$, $M_b = \{2^2, 3, 5^2\}$, $\text{НОД}(a, b) = 2 \cdot 3 = 6$, $\text{НОК}(a, b) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$.

Упражнение 3. Выведите из обоих законов дистрибутивности утверждения, относящиеся к НОД и НОК. Проверьте их на примерах.

4. Подсчет числа мультимножеств

k -мультимножеством n -множества будем называть мультимножество мощности k на множестве из n элементов. Здесь k может быть больше, чем n , в отличие от случая k -подмножеств n -множества, где предполагалось, что $k \leq n$. Обозначим F_n^k число всех k -мультимножеств n -множества. Например, $F_3^2 = 6$, так как в 3-множестве $\{1, 2, 3\}$ имеются следующие 2-мультимножества: $\{1, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{3, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$; $F_3^3 = 10$, $F_3^4 = 15$ (в 3-множестве $\{1, 2, 3\}$ имеются следующие 4-мультимножества — перечислим их без фигурных скобок:

$$1^4, 2^4, 3^4; 1^3 2, 1^3 3, 2^3 1, 2^3 3, 3^3 1, 3^3 2; 1^2 2^2, 1^2 3^2, 2^2 3^2; 1^2 2 3, 2^2 1 3, 3^2 1 2).$$

Упражнение 4. Перечислите все 3-мультимножества 3-множества.

Т е о р е м а 1. Для неотрицательных целых k и n имеет место

$$F_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

◁ Пусть $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — n -множество; числа $\nu(x_i) = a_i$ можно выбрать произвольно, лишь бы выполнялось равенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k. \quad (*)$$

Тогда $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n}\}$ — k -мультимножество на S . Следовательно, число всех k -мультимножеств n -множества совпадает с числом решений уравнения (*) в целых неотрицательных числах: $F_n^k = C_{k+n-1}^{n-1}$; но по свойству 1 чисел сочетаний $C_{k+n-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$. ▷

Пример. $F_3^2 = C_4^2 = 6$, $F_3^3 = C_5^3 = C_5^2 = 10$, $F_3^4 = C_6^4 = C_6^2 = 15$; последние пятнадцать 4-мультимножеств соответствуют пятнадцати решениям уравнения $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ ($n = 3$, $k = 4$): $4+0+0$, $0+4+0$, $0+0+4$; $3+1+0$, $3+0+1$, $1+3+0$, $1+0+3$, $0+3+1$, $0+1+3$; $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$; $2+2+0$, $2+0+2$, $0+2+2$.

§6. Биномиальная и мульти- номиальная формулы

1. Формула бинома

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — независимые переменные. Рассмотрим формулы

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2) &= 1+x_1+x_2+x_1x_2, \\ (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) &= 1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Мы можем заметить, что каждое слагаемое в точности соответствует некоторому подмножеству множества $\{x_1, x_2\}$ или $\{x_1, x_2, x_3\}$. Так и в общем случае: существует биекция множества слагаемых правой части равенства

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) &= \\ = 1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n+ & \quad (1) \\ +x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+\dots+x_1x_2\dots x_n & \end{aligned}$$

на булеан множества $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, причем слагаемое 1 соответствует пустому подмножеству, слагаемое с k сомножителями соответствует k -подмножеству. Поэтому число слагаемых с k сомножителями равно C_n^k . Подставим $x_1 = x, x_2 = x, \dots, x_n = x$:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \quad (2)$$

Доказанная формула (2) называется *биномиальной формулой*, а коэффициенты C_n^k часто называются *биномиальными коэффициентами*.

С л е д с т в и е. $(a+b)^n =$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (3)$$

◁ $(a+b)^n = [a(1+\frac{b}{a})]^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$, и далее, применяя формулу (2), получим (3). ▷

Пример. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Упражнение 1. Раскройте $(a + 2b)^6$.

2. Мультиномиальные коэффициенты.

Биномиальные коэффициенты мы можем интерпретировать таким образом. Отнесем каждый элемент n -множества $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ к одной из двух категорий: k элементов к первой и $(n - k)$ — ко второй. Элементы первой категории образуют k -подмножество $T = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \subset S$; следовательно, всего их C_n^k .

Пусть теперь имеется не 2, а m категорий K_1, K_2, \dots, K_m ; кроме того, пусть a_1, a_2, \dots, a_m — неотрицательные целые числа, дающие разложение числа n : $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Пусть $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ — число способов отнесения каждого из элементов n -множества S к одной из категорий K_1, K_2, \dots, K_m так, что в категорию K_i попадет в точности a_i элементов. Заметим, что $C_n^k = P_n(k, n - k)$. Числа $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ называются *мультиномиальными коэффициентами*.

Обычно элементы множества S представляют в виде n различных шаров (например, шаров, пронумерованных числами от 1 до n), а категории — в виде m различных (например, пронумерованных или раскрашенных) коробок. Тогда $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ равно числу способов разложить шары по коробкам так, чтобы i -я коробка содержала a_i шаров.

$$\text{Т е о р е м а 1. } P_n(a_1, a_2, \dots, a_m) = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_m!}.$$

◁ Отберем из n элементов a_1 элементов $C_n^{a_1}$ способами в категорию K_1 , затем из оставшихся $(n - a_1)$ отберем a_2 элементов $C_{n-a_1}^{a_2}$ способами в категорию K_2 , из оставшихся $(n - a_1 - a_2)$ отберем a_3 элементов $C_{n-a_1-a_2}^{a_3}$ способами в категорию K_3 и т.д. Общее число распределений по категориям согласно принципу произведения равно

$$C_n^{a_1} C_{n-a_1}^{a_2} C_{n-a_1-a_2}^{a_3} \dots C_{n-a_1-\dots-a_{m-2}}^{a_{m-1}}$$

(в последнюю категорию попадут все оставшиеся элементы, так что выбирать не придется). Выражая числа сочетаний через факториалы, получим

$$P_n(a_1, \dots, a_m) = \frac{n!}{a_1! (n - a_1)!} \frac{(n - a_1)!}{a_2! (n - a_1 - a_2)!} \frac{(n - a_1 - a_2)!}{a_3! (n - a_1 - a_2 - a_3)!} \times \\ \times \dots \frac{(n - a_1 - \dots - a_{m-2})!}{a_{m-1}! (n - a_1 - \dots - a_{m-1})!} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_m!}. \triangleright$$

3. Перестановки мультимножества

Мультиномиальные коэффициенты появляются также при подсчете перестановок мультимножества M . (Напомним, что если M — обычное множество, $\#M = n$, то число всех перестановок множества M равно $n!$). *Перестановка мультимножества M* определяется как линейное упорядочение всех экземпляров, входящих в M . Если M — мультимножество на некотором множестве A , то функция $\nu : A \rightarrow \mathbb{N}$ указывает, сколько раз каждый элемент $x \in A$ появится в перестановке; а именно $\nu(x)$ раз. Множество всех перестановок мультимножества M будем обозначать $S(M)$.

Пример. Мультимножество $M_1 = \{1, 1, 2, 3\}$ имеет 12 перестановок: 1123, 1132, 1213, 1312, 1231, 1321, 2131, 3121, 2113, 3112, 2311, 3211; мультимножество $M_2 = \{1, 1, 2, 2\}$ — только 6 перестановок: 1122, 1212, 1221, 2121, 2112, 2211.

Т е о р е м а 2. Если $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_m^{a_m}\}$ — мультимножество, $\#M = n$, то $\#S(M) = P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

(В формулировке теоремы явно указано, сколько экземпляров каждого элемента x_i входит в мультимножество M : именно $a_i = \nu(x_i)$, причем $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$.)

◁ Отнесем элементы множества $[1, n]$ к m категориям K_1, K_2, \dots, K_m следующим способом: если в перестановке мультимножества M экземпляр x_i появляется на j -м месте, то число $j \in [1, n]$ поместим в категорию K_i . Таким образом мы установим биекцию между множеством $S(M)$ всех перестановок мультимножества M и множеством всех распределений n чисел по m категориям с заданной мощностью каждой категории $\#K_i = a_i$. ▷

В частности, число всех перестановок обычного n -множества равно $P_n(1, 1, \dots, 1) = n!$.

Задача. Сколькими способами можно переставить буквы в слове „колокол“?

◁ Так как данное слово является одной из перестановок мультимножества $\{к^2, л^2, о^3\}$, то ответом будет $P_7(2, 2, 3) = \frac{7!}{2!2!3!} = 210$. ▷

Упражнение 2. Найдите количество всех перестановок мультимножеств $M_1 = \{1, 1, 2, 3\}$ и $M_2 = \{1, 1, 2, 2\}$.

4. Мультиномиальная формула

Т е о р е м а 3. Сумма t слагаемых в степени n может быть пред-

ставлена в виде

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{a_1+a_2+\dots+a_m=n} P_n(a_1, a_2, \dots, a_m) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}. \quad (4)$$

◁ При перемножении выражения $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ на себя n раз получим сумму произведений вида $d_1 d_2 \dots d_n$, где каждое d_j равно некоторому x_i . При приведении подобных членов соберутся вместе слагаемые вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}$, причем их столько, сколько возможно перестановок мультимножества $\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_m^{a_m}\}$, т.е. $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$. ▷

Формула (4) называется мультиномиальной формулой; в силу теоремы 1 ее можно переписать так:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{a_1+a_2+\dots+a_m=n} \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_m!} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}.$$

Отметим, что до приведения подобных членов имеется m слагаемых; после приведения — в мультиномиальной формуле — C_{n+m-1}^{m-1} слагаемых.

Примеры. При $m = 2$ получается биномиальная формула, в ней $C_{n+1}^1 = (n+1)$ слагаемое: $(x_1 + x_2)^n = C_n^0 x_1^n + C_n^1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + C_n^n x_2^n$.

Многочлен $(x_1 + x_2 + x_3)^2$ должен содержать $C_4^2 = 6$ слагаемых вида $\frac{2!}{2!} x_1^2 = x_1^2$, $\frac{2!}{1!1!} x_1 x_2$ и аналогичные слагаемые с другими индексами: $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$ (слагаемые соответствуют различным решениям уравнения $a_1 + a_2 + a_3 = 2$: $2+0+0$, $0+2+0$, $0+0+2$, $1+1+0$, $1+0+1$, $0+1+1$).

Упражнение 3. Раскройте выражение $(a + b + c)^3$. Сколько получится слагаемых (после приведения подобных членов)?

5. Биномиальные тождества

Вернемся к биномиальным коэффициентам C_n^k . Мы знаем такие их свойства:

- 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- 2) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;
- 3) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$;
- 4) $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$

Докажем эти свойства, исходя из формулы бинома.

◁ Свойство 3) можно доказать таким образом: в формуле (2) положим $x = 1$; тогда получим $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$. Свойство 4): положим

$x = -1$; тогда $0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$.

Свойство 2) : C_n^k является коэффициентом при x^k в $(1+x)^n$; но $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1}$. \triangleright

Упражнение 4. Докажите свойство 1) самостоятельно.

Вот еще одно биномиальное тождество:

$$5) \quad n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k, \text{ т.е. } n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$$

\triangleleft Проидифференцируем формулу бинома (2); в результате мы получим:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^{k-1}; \text{ теперь подставим } x = 1. \triangleright$$

$$\text{Упражнение 5. Докажите: } n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k.$$

§7. Бинарные отношения

1. Декартово произведение множеств

Пусть A, B — множества. Множество всех упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$, называется *декартовым произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$. („Упорядоченность“ пары означает, что первым элементом в паре всегда является некоторый элемент множества A , а вторым — элемент множества B .)

Пример. $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$. В этом случае

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Можно рассматривать несколько множеств A_1, A_2, \dots, A_n : их декартовым произведением $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ будет являться множество всех упорядоченных последовательностей (n -ок, или кортежей) элементов, взятых по одному из каждого множества, причем в фиксированном порядке: $(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A_i$.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}, C = \{\alpha, \beta\}$. В этом случае $A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta), (3, a, \alpha), (3, a, \beta), (3, b, \alpha), (3, b, \beta)\}$.

Естественный вопрос: сколько элементов содержит декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$?

Теорема 1. Если $\#A_1 = k_1, \#A_2 = k_2, \dots, \#A_n = k_n$, то $\#A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$.

(В частности, $\#A \times B = (\#A) \cdot (\#B)$.)

◁ Следует из принципа произведения. ▷

В случае, когда все множества в декартовом произведении равны между собой, говорят о *декартовой степени* множества:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n.$$

Например, декартовым квадратом множества $A = \{a, b, c\}$ является $A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

С л е д с т в и е. $\#(A^n) = (\#A)^n$.

Упражнение 1. При каком условии декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ пусто?

2. Определение бинарного отношения

Бинарным отношением на множестве A называется некоторое подмножество R его декартова квадрата $A^2 = A \times A$. Говорят, что $a \in A$ находится в отношении R к элементу $b \in A$, если $(a, b) \in R$; это записывается так: aRb .

Примеры бинарных отношений:

- 1) на множестве вещественных чисел \mathbb{R} отношение „меньше“ $<$;
- 2) на множестве натуральных чисел \mathbb{N} отношение делимости $|$;
- 3) на множестве прямых в пространстве отношение параллельности \parallel ;
- 4) на множестве векторов в пространстве отношение перпендикулярности \perp ;
- 5) на множестве всех подмножеств $P(A)$ некоторого множества A отношение включения \subset .

Способы задания бинарных отношений таковы:

1) перечисление пар элементов, принадлежащих бинарному отношению. Например, для конечного множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ отношение делимости $|$ может быть задано следующим образом: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

2) график (см. рис. 19);

3) стрелочная диаграмма (см. рис. 20).

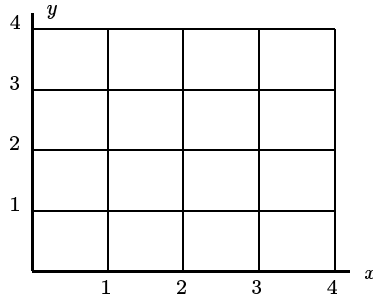


Рис. 19. График отношения $x \mid y$.

Рис. 20. Диаграмма отношения $x \mid y$.

Образуем множество всех бинарных отношений на множестве A ; будем обозначать его $B(A)$. Очевидно, $B(A) = P(A \times A)$, откуда сразу вытекает, что, если $\#A = n$, то $\#B(A) = 2^{n^2}$.

Пусть R, S — бинарные отношения на A . Так как бинарное отношение — множество, можно определить включение одного бинарного отношения в другое: $R \subset S$; а также операции над этими бинарными отношениями: $R \cup S, R \cap S, \bar{R} = (A \times A) \setminus R$; причем автоматически остаются справедливыми все законы для действий над множествами. Надо лишь помнить, что универсум в данном случае — множество $U = A \times A$.

Пример. Пусть R — отношение \mid на множестве $[1,4]$; S — отношение $>$ на том же множестве; T — отношение \leq . Тогда $R \subset T, R \cap S = O$ — пустое отношение (такого обозначения мы будем придерживаться для отличия от \emptyset), $R \cap T = R, T \cup S = A \times A, \bar{S} = T, R = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

3. Произведение отношений

Пусть R, S — отношения из $B(A)$; их произведением $R \cdot S$ называется бинарное отношение, определяемое так:

$$a(RS)b \iff \exists c \in A. aRc, cSb.$$

Пример. Пусть R — отношение $<$ на \mathbb{N} , S есть отношение „быть следующим числом“, т.е. $aSb \iff a = b + 1$; тогда $a(RS)b$ означает: a меньше некоторого c , которое равно $b + 1$, что иначе можно выразить неравенством $a < b$; итак, RS есть „ $<$ “.

Рассмотрим еще один пример, связанный с родственными отношениями на множестве людей. Обозначим отношения ближайшего родства: S — сестра, B — брат, R — отец, G — жена, M — муж. Условимся, что

запись aSb будет означать „ a является сестрой b “ и т.д. Тогда произведения отношений будут обозначать более дальнее родство: SR — тетя (по линии отца), BG — шурина, GB — золовка, SG — свояченица. Заметим, что $RS = R$.

Докажем несколько законов, связанных с произведением отношений:

1) $(RS)T = R(ST)$ (ассоциативность).

◁ $a((RS)T)b \iff \exists c, d. aRc, cSd, dTb$; этому же выражению эквивалентно и $a(R(ST))b$. ▷

Заметим, что произведение отношений не является коммутативным — лишь в отдельных случаях верно, что $RS = SR$.

Упражнение 2. Приведите пример отношений R и S , для которых $RS \neq SR$, и пример R и S , для которых $RS = SR$.

2) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$, $S(R_1 \cup R_2) = SR_1 \cup SR_2$ (из-за некоммутативности необходимо выписать 2 таких закона дистрибутивности — дистрибутивность справа и дистрибутивность слева).

◁ $a(R_1 \cup R_2)Sb \iff \exists c. aR_1 \cup R_2c, cSb$; но первое равносильно aR_1c или aR_2c , так что aR_1Sb или $aR_2Sb \iff a(R_1S \cup R_2S)b$; второй закон доказывается совершенно аналогично. ▷

В доказанных законах дистрибутивности нельзя \cup заменить на \cap , так как $a(R_1 \cap R_2)Sb \iff \exists c. aR_1c, aR_2c, cSb$, но в то же время $a(R_1S \cap R_2S)b \iff \exists c. aR_1c, cSb$ и $\exists d. aR_2d, dSb$, и в этом случае может не существовать такой элемент c , что для него и aR_1c , и aR_2c , и cSb . Справедливы лишь следующие включения:

3) $(R_1 \cap R_2)S \subset R_1S \cap R_2S$, $S(R_1 \cap R_2) \subset SR_1 \cap SR_2$ (частичная дистрибутивность пересечения относительно произведения).

Упражнение 3. Докажите свойство 3).

4) $R_1 \subset R_2 \implies R_1S \subset R_2S$, $SR_1 \subset SR_2$ (монотонность).

◁ $R_1 \subset R_2 \iff R_1 \cup R_2 = R_1 \implies (R_1 \cup R_2)S = R_1S$, но в силу свойства 2) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$, и из $R_1S \cup R_2S = R_1S$ заключаем, что $R_1S \subset R_2S$. Аналогично получаем второе включение. ▷

4. Обратное отношение

Пусть R — отношение из $B(A)$; *обратное* отношение R определяется так: $aR^{-1}b \iff bRa$. Например, $(<)^{-1} = (>)$; если R означает „отец“, S — „сын“, то $R^{-1} = S$, $S^{-1} = R$.

Легко доказать следующие свойства:

1) $(R^{-1})^{-1} = R$;

◁ $a(R^{-1})^{-1}b \iff bR^{-1}a \iff aRb$. ▷

2) $R \subset S \implies R^{-1} \subset S^{-1}$;

- 3) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
 $\triangleleft a(R \cap S)^{-1}b \iff bSa, bRa \iff aR^{-1}b, aS^{-1}b. \triangleright$
 4) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
 5) $(ST)^{-1} = T^{-1} \cdot S^{-1}$;
 $\triangleleft a(ST)^{-1}b \iff b(ST)a \iff \exists c. bSc, cTa \iff \exists c. aT^{-1}c, cS^{-1}b. \triangleright$

Упражнение 4. Докажите свойства 2 и 4.

Пример. Обозначим отношение „быть следующим числом“ символом \oplus : $a \oplus b \iff a = b + 1$. Мы знаем, что $<\oplus = \leq$; тогда из 5): $\oplus^{-1} <^{-1} = \leq^{-1}$, т.е. $\oplus > = \geq$, где $a \ominus b \iff a = b - 1$ („быть предыдущим числом“).

Кроме пустого отношения O , для которого $RO = OR = O$ (каким бы ни было отношение R), существует еще одно важное отношение — *единичное* отношение E : $aEb \iff a = b$; т.е. $E = \{(a, a) \mid a \in A\}$ — множество всех пар с одинаковыми элементами (поэтому E называют также *диагональю* декартова квадрата A). Для любого отношения R : $ER = RE = R$, $E^{-1} = E$.

Упражнение 5. Докажите эти равенства.

5. Свойства отношений

Мы уже встречались с различными отношениями, которые обладали следующими свойствами:

- 1) *рефлексивность*: $aRa (\forall a \in A)$, т.е. $E \subset R$;
- 2) *транзитивность*: $aRb, bRc \implies aRc$, т.е. $RR \subset R$;
- 3) *антисимметричность*: $aRb, bRa \implies a = b$, т.е. $R \cap R^{-1} \subset E$;
- 4) *симметричность*: $aRb \implies bRa$, т.е. $R^{-1} = R$.

График рефлексивного отношения характеризуется тем, что содержит в себе диагональ, симметричного отношения — тем, что он симметричен относительно диагонали, антисимметричного отношения — тем, что, напротив, не содержит ни одной пары точек, симметричной относительно диагонали, кроме точек самой диагонали.

Т е о р е м а 2. Если отношение R обладает одним из свойств: рефлексивность, транзитивность, антисимметричность, симметричность — то и R обладает тем же свойством.

\triangleleft если $E \subset R$, то $E^{-1} = E \subset R$; если $RR \subset R$, то $R^{-1}R^{-1} = (RR)^{-1} \subset R^{-1}$; если $R^{-1} = R$, то $(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$; если $R \cap R^{-1} \subset E$, то $R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subset E$. \triangleright

§8. Отношения эквивалентности и разбиения множеств

1. Определение отношения эквивалентности

Пусть A — множество. *Отношением эквивалентности* на множестве A называется отношение на A , обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Если R — отношение эквивалентности на A , то $E \subset R$, $R^{-1} = R$, $RR \subset R$, откуда $RR = R = R^{-1}$. Часто вместо обозначений aRb или $(a, b) \in R$ в случае отношения эквивалентности используют обозначения $a \overset{R}{\sim} b$ или $a \equiv b \pmod{R}$ (a эквивалентно b по модулю R). Запишем свойства, характеризующие эквивалентность, используя последний стиль обозначений:

- 1) $a \equiv a \pmod{R}$;
- 2) $a \equiv b \pmod{R} \implies b \equiv a \pmod{R}$;
- 3) $a \equiv b \pmod{R}, b \equiv c \pmod{R} \implies a \equiv c \pmod{R}$.

График отношения эквивалентности можно охарактеризовать следующим образом (рис. 21):

- 1) отмечены все точки, лежащие на диагонали (рефлексивность);
- 2) каждой отмеченной точке на графике соответствует симметричная с ней относительно диагонали (симметричность);

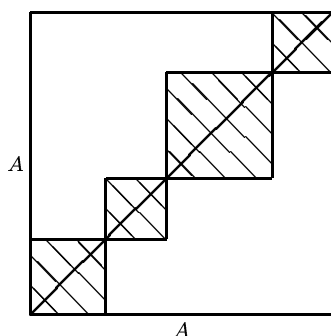


Рис. 21. График отношения эквивалентности.

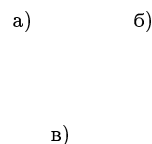


Рис. 22. Диаграмма эквивалентности.

Для полного описания графика отношения эквивалентности остается добавить, что он составлен из попарно непересекающихся квадратов, диагонали которых совпадают с диагональю декартова квадрата.

Для стрелочной диаграммы из свойства рефлексивности вытекает существование петель в каждой точке (рис. 22, а); из симметричности — на-

личие между каждой парой точек антипараллельных стрелок (рис. 22, б); из транзитивности вытекает, что для любой пары стрелок, таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья стрелка, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй (рис. 22, в).

2. Классы эквивалентности

Если на множестве A задано отношение эквивалентности R , то *классом эквивалентности* элемента $a \in A$ по модулю R называется множество всех $b \in A$, связанных с a отношением R ; этот класс эквивалентности обозначается $[a]$ (или C_a). Будем использовать для отношения эквивалентности обозначение \sim . Тогда $C_a = \{b \in A \mid b \sim a\}$.

Докажем несколько свойств классов эквивалентности:

1) $a \in C_a$.

◁ $a \sim a$ в силу рефлексивности. ▷

2) если $a \sim b$, то $C_a = C_b$.

◁ Если $x \in C_a$, то $a \sim x$, и по транзитивности $b \sim x$, так что $x \in C_b$; аналогично доказывается обратное. ▷

3) если $a \not\sim b$, то $C_a \cap C_b = \emptyset$.

◁ Предположим противное: пусть $a \not\sim b$, но существует x такое, что $x \in C_a \cap C_b$; тогда $a \sim x$ и $b \sim x$, что влечет за собой по симметричности и транзитивности $a \sim b$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ▷

Упражнение 1. Докажите: если $a \in C_b$, то $b \in C_a$.

3. Разбиения множества

Разбиением множества A называется семейство непустых подмножеств, попарно непересекающихся и в объединении дающих все A . Формально разбиение множества A определяется как множество частей, или блоков $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ множества A , причем:

1) $B_i \neq \emptyset$;

2) $B_i \cap B_j = \emptyset$ (при $i \neq j$);

3) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = A$.

Т е о р е м а 1. *Всякое отношение эквивалентности на множестве A задает разбиение множества A , блоками которого являются классы эквивалентности. И обратно, всякому разбиению множества A соответствует отношение эквивалентности, классы эквивалентности которого совпадают с блоками разбиения.*

◁ Если задано отношение эквивалентности \sim , то в силу свойств 2) и 3) два класса эквивалентности C_a и C_b или совпадают, или не пересекаются; таким образом, все классы эквивалентности C_1, C_2, \dots, C_k образуют множество попарно непересекающихся частей множества A . В силу свойства 1) каждый класс эквивалентности не пуст, а все они в сумме дают A .

Обратное утверждение теоремы доказывается проверкой свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения $a \sim b$, определенного следующим образом: $a \sim b \iff a$ и b принадлежат одному блоку разбиения. ▷

Упражнение 2. Проверьте эти свойства.

Разбиение множества A , соответствующее отношению эквивалентности \sim , называется *фактор-множеством* множества A по отношению эквивалентности \sim и обозначается A/\sim . *Системой представителей* A/\sim отношения эквивалентности \sim на множестве A называется подмножество, содержащее ровно по 1 элементу из каждого класса эквивалентности. Очевидно, что $\#(A/\sim) = \#A_{\sim}$.

Примеры.

1) Пусть \mathbb{Z} — множество целых чисел, p — целое, отличное от 0; рассмотрим отношение R на \mathbb{Z} : $aRb \iff p \mid a - b$. Это — отношение эквивалентности, называемое отношением сравнения по модулю p и обозначаемое $a \equiv b \pmod{p}$. Все числа b из класса эквивалентности, который называется в данном случае классом вычетов по модулю p , могут быть представлены в виде $b = a + kp$ (k — произвольное целое). Отдельный класс вычетов по модулю p , сравнимых с a , может быть обозначен $a + \mathbb{Z}p$; таким образом, $\mathbb{Z}/\sim = \{\mathbb{Z}p, 1 + \mathbb{Z}p, \dots, (p - 1) + \mathbb{Z}p\}$. В качестве системы представителей можно взять множество $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$.

Упражнение 3. Докажите, что отношение сравнения по модулю p является отношением эквивалентности.

2) Рассмотрим множество прямых на плоскости. Отношение параллельности \parallel — отношение эквивалентности, так как всякая прямая параллельна самой себе: $l_1 \parallel l_2$, симметричность: $l_1 \parallel l_2 \implies l_2 \parallel l_1$ и транзитивность: $l_1 \parallel l_2, l_2 \parallel l_3 \implies l_1 \parallel l_3$ — очевидны. Каждый класс эквивалентности представляет собой некоторое направление на плоскости и полностью определяется заданием одной прямой из этого класса.

Упражнение 4. Найдите систему представителей для отношения \parallel .

3) Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy . Будем говорить, что $M_1 \sim M_2$, если их абсциссы равны; тогда классами эквивалентности будут множества точек, абсциссы которых равны между собой, т.е. прямые, параллельные оси Ox .

4. Числа Стирлинга и числа Белла

Число разбиений n -множества на k блоков называется *числом Стирлинга* и обозначается $S(n, k)$. Ясно, что $S(n, k) = 0$ при $k > n$, $S(n, 0) = 0$; кроме того

$$S(n, 1) = 1, S(n, 2) = 2^{n-1} - 1, S(n, n) = 1, S(n, n-1) = C_n^2.$$

Упражнение 5. Докажите эти равенства.

Пример. $S(4, 3) = 6$. Действительно, существует 6 различных разбиений 4-множества $A = \{a, b, c, d\}$ на 3 блока:

$$a|b|cd, a|c|bd, b|c|ad, a|d|bc, b|d|ac, c|d|ab.$$

Т е о р е м а 2. При $n > 1$ $S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$.

◁ Достаточно ограничиться случаем, когда $0 < k < n$. Чтобы получить разбиение множества $A = [1, n]$ на k блоков, нужно либо 1) разбить множество $[1, n-1] = A \setminus \{n\}$ на k блоков и последний элемент n поместить в один из этих k блоков, либо 2) разбить множество $[1, n-1]$ на $(k-1)$ блок, а из оставшегося элемента n образовать отдельный, k -й блок. ▷

Общее число разбиений n -множества называется числом Белла и обозначается $B(n)$. Ясно, что $B(n) = S(n, 0) + S(n, 1) + \dots + S(n, n)$. Чтобы эти формулы имели место и при $n = 0$, полагают $S(0, 0) = 1$ и $B(0) = 1$. Составим таблицу чисел Стирлинга и Белла.

$S(n, k)$	$\backslash \begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	n	$B(n)$
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	2	2
3	0	0	1	3	1	0	0	3	5
4	0	0	1	7	6	1	0	4	15
5	0	0	1	15	25	10	1	5	52

(В силу теоремы 2, чтобы получить очередной элемент в этой таблице, стоящее над ним число умножаем на индекс столбца и прибавляем число, стоящее слева; например, $25 = 3 \cdot 6 + 7$.)

Пример. $B(3) = 5$, так как существует всего 5 разбиений множества $A = \{a, b, c\}$: $a|b|c$, $ab|c$, $a|bc$, $b|ac$, abc .

Упражнение 6. Найдите все разбиения множества $A = \{a, b, c, d\}$.

Каждому разбиению (согласно теореме 1) соответствует отношение эквивалентности. Поэтому таким же образом можно перечислять все отношения эквивалентности на заданном множестве.

Т е о р е м а 3. $B(n+1) = C_n^0 B(0) + C_n^1 B(1) + C_n^2 B(2) + \dots + C_n^n B(n)$.

◁ Разбиение множества $A = [1, n+1]$ можно провести в 2 этапа: сначала выбрать блок B , содержащий последний элемент $n+1$, а затем выбрать разбиение оставшегося множества $A \setminus B$. Блок B — непустой, число его элементов заключено в пределах от 1 до $n+1$; следовательно, $A \setminus B$ может содержать от 0 до n элементов множества $[1, n]$, так как $n+1 \notin A \setminus B$ наверняка. Итак, первый шаг, в зависимости от $i = \#A \setminus B$, можно сделать C_n^i способами; второй шаг, разбиение i -множества $A \setminus B$ на блоки, — $B(i)$ способами. Остается использовать принцип произведения и принцип суммы, чтобы получить $\sum_{i=0}^n C_n^i B(i)$. ▷

Примеры. $B(2) = 1 \cdot B(0) + 1 \cdot B(1) = 2$, $B(3) = 1 \cdot B(0) + 2 \cdot B(1) + 1 \cdot B(2) = 5$, $B(4) = 1 \cdot B(0) + 3 \cdot B(1) + 3 \cdot B(2) + 1 \cdot B(3) = 15$ и т.д.

§9. Естественная факторизация отображений

1. Суперпозиция отображений

Рассмотрим отображение $f : A \rightarrow B$; можно связать с ним множество пар

$$R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B,$$

которое определяет некоторое бинарное отношение между элементами множества A и B . Это отношение обладает свойством:

для любого элемента $a \in A$ существует единственный элемент $b \in B$ такой, что $(a, b) \in R$ (*функциональность*).

Пусть $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ — два отображения. Тогда $R_f \subset A \times B$, $R_g \subset B \times C$, и можно определить $R_f \cdot R_g \subset A \times C$:

$$aR_f \cdot R_g c \iff \exists b \in B. aR_f b, bR_g c.$$

Таким образом, с помощью произведения отношений мы пришли к понятию сложной функции: $c = g(f(a))$, если существует $b \in B$ такое, что $b = f(a)$, $c = g(b)$. Операция построения сложной функции носит название суперпозиции функций (или отображений).

Суперпозицией отображений $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ называется отображение $h = g \cdot f : A \rightarrow C$, переводящее a в $g(f(a))$, т.е. $h(a) = g \cdot f(a) =$

$g(f(a))$. Суперпозицию отображений можно изобразить с помощью диаграммы:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C, \quad a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c.$$

Чтобы порядок функциональных символов в формулах соответствовал порядку следования стрелок в диаграммах, иногда используется запись символов функций справа от аргумента: $(a)f \cdot g = ((a)f)g$.

Примеры.

1) Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$; тогда $g \cdot f(x) = g(f(x)) = \sin x^2$; $f \cdot g(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$. Как видим, суперпозиция отображений, подобно произведению отношений, не обладает свойством коммутативности.

2) Рассмотрим линейную функцию: $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$; их суперпозиция $g \cdot f(x) = g(f(x)) = c(ax + b) + d = (ac)x + (bc + d)$ — также линейная функция. Говорят, что множество всех линейных функций — *замкнутый класс* (относительно суперпозиции).

Упражнение 1. Является ли замкнутым классом относительно суперпозиции множество всех дробно-линейных функций вида $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$?

2. Прообразы и образы

Пусть $f : A \rightarrow B$ — отображение. Рассмотрим два понятия: прообраз элемента относительно отображения f и образ множества относительно отображения f .

Если $b \in B$, то *прообраз* элемента b относительно отображения f есть множество всех элементов $a \in A$, переводимых отображением f в b :

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Если $M \subset A$, то *образ* множества M относительно отображения f есть подмножество в B , состоящее из образов всех элементов из M :

$$f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}.$$

В частности, можно определить образ всего множества A : $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ — это подмножество в B .

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$ — функция, определенная для всех вещественных чисел: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; тогда

$$f^{-1}(0) = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad f^{-1}(1) = \{(2n + 1)\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad f^{-1}(2) = \emptyset;$$

$$f([0, \pi]) = [0, 1], \quad f(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

Ранее (в §4) мы уже определили сюръективные, инъективные и биективные отображения. Сюръективные отображения $f : A \rightarrow B$ характеризуются тем, что образ A совпадает со всем B , т.е. $f(A) = B$. Инъективные отображения $f : A \rightarrow B$ — тем, что прообраз каждого элемента $b \in B$, если он не пуст, состоит из единственного элемента, т.е. $\#f^{-1}(b) \leq 1$. Наконец, биективные, т.е. взаимно-однозначные отображения $f : A \leftrightarrow B$ — характеризуются тем, что $f(A) = B$ и для каждого $b \in B$ имеется единственный элемент-прообраз $f^{-1}(b)$, и, стало быть, существует обратное отображение $f^{-1} : B \rightarrow A$.

3. Естественная факторизация

Определим специальный тип инъективного отображения. Если $A \subset B$, то отображение $i : A \rightarrow B$, $i(a) = a$, полученное ограничением тождественного отображения из B в B на часть множества A , называется *вложением* множества A в B , и обозначается $A \xrightarrow{i} B$.

Рассмотрим произвольную инъекцию $f : A \rightarrow B$.

Л е м м а 1. *Всякая инъекция представима в виде суперпозиции биекции и вложения.*

◁ Рассмотрим отображение $\bar{f} : A \rightarrow f(A)$, определенное равенством $\bar{f}(a) = f(a)$. Отображение \bar{f} получается из f сужением области значений на реальное множество значений и поэтому является взаимно-однозначным. Начертим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \bar{f} & \uparrow i \\ & & f(A) \end{array}$$

из которой следует искомая суперпозиция $f = i \cdot \bar{f} : A \xrightarrow{\bar{f}} f(A) \xrightarrow{i} B$. ▷

Рассмотрим теперь специальный тип сюръективного отображения. Пусть \sim — отношение эквивалентности на множестве A . Отображение $p : A \rightarrow A/\sim$, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ класс эквивалентности, в котором он содержится : $p(a) = C_a$, называется *проекцией* множества A на фактормножество A/\sim .

Л е м м а 2. *Всякая сюръекция представима в виде суперпозиции проекции и биекции.*

◁ Пусть $f : A \rightarrow B$ — произвольная сюръекция. Зададим разбиение множества A на прообразы элементов $b_1, b_2, \dots \in B$ относительно отображения $f: f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \dots$. Этому разбиению соответствует эквивалентность \sim , определенная формулой: $a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$. Очевидно, что проекция p отображает все элементы из блока $f^{-1}(b)$ в соответствующий класс C_a , $a \in f^{-1}(b)$, который отображается посредством \tilde{f} в элемент $b \in B$. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ A/\sim & & \end{array}$$

вытекает суперпозиция $f = \tilde{f} \cdot p : A \xrightarrow{p} A/\sim \xrightarrow{\tilde{f}} B$. ▷

Проведем теперь разложение произвольного отображения.

Т е о р е м а 1. *Всякое отображение можно представить в виде суперпозиции проекции, биекции и вложения.*

◁ Пусть $f : A \rightarrow B$ — произвольное отображение. Ограничим область значений f , как в доказательстве леммы 1 — возьмем вместо B множество $f(A)$. Отображение $\tilde{f} : A \rightarrow f(A)$ с ограниченной областью значений является сюръекцией. Применим к \tilde{f} лемму 2. В результате получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ A/\sim & \xleftarrow{\tilde{f}} & f(A) \end{array}$$

и разложение $f = i \cdot \tilde{f} \cdot p$. ▷

Такое разложение отображения f в суперпозицию проекции, биекции и вложения называется *естественной факторизацией* отображения f .

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Определим эквивалентность для вещественных чисел x_1, x_2 : $x_1 \sim x_2$, если $\sin x_1 = \sin x_2$. Класс эквивалентности C_x можно определить так: $C_x = \{(-1)^n x + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Вместо фактор-множества \mathbb{R}/\sim , состоящего из классов эквивалентности, можно рассмотреть систему представителей этих классов — отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Проекцию $p : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ удобно задать формулой $p(x) = \arcsin(\sin x)$ (рис. 23, а).

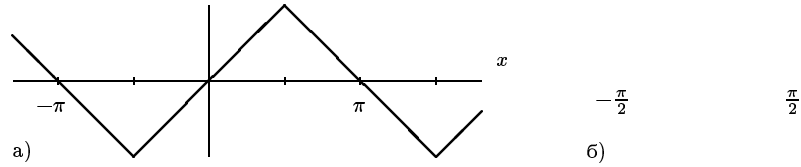


Рис. 23. Разложение функции $f(x) = \sin x$: а) проекция p ; б) биекция \tilde{f} .

Биекция $\tilde{f} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \leftrightarrow [-1, 1]$ представляет собой ограничение функции \sin , имеющее обратную функцию $\tilde{f}^{-1} = \arcsin$ (рис. 23, б). Добавив вложение $i : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$, получим естественную факторизацию.

4. Число сюръекций

Пусть A, B — конечные множества, $\#A = n$, $\#B = k$. Нам известно из §4, что число всех биекций $f : A \leftrightarrow B$ равно $n!$ (при этом должно выполняться $n = k$), число всех инъекций $f : A \hookrightarrow B$ равно $(k)_n = k(k-1)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$.

Формулу для числа инъекций можно вывести, рассматривая диаграмму из доказательства леммы 1. Действительно, число биекций между n -множествами A и $f(A)$ равно числу перестановок n -множества, т.е. $n!$; число вложений n -множества $f(A)$ в k -множество B равно C_k^n , так как подмножества $f(A) \subset B$ можно выбрать C_k^n способами; перемножая найденные числа, получим $n! C_k^n = \frac{k!}{(k-n)!} = (k)_n$.

Теперь найдем число всех сюръекций $f : A \twoheadrightarrow B$ — с помощью диаграммы из доказательства леммы 2. Число всех проекций из n -множества A на k -множество A/\sim равно числу всех разбиений n -множества на k блоков, т.е. $S(n, k)$. Число биекций между k -множествами A/\sim и B равно $k!$. Итак, мы доказали утверждение:

Т е о р е м а 2. Число всех сюръекций n -множества на k -множество равно $S(n, k) \cdot k!$.

Сделаем еще один шаг — рассмотрим произвольное отображение $f : A \rightarrow B$. При условиях $\#A = n$, $\#B = x$ число всех таких отображений равно x^n . Будем использовать диаграмму из доказательства теоремы 1. Чтобы построить функцию $f : A \rightarrow B$, сначала выберем мощность $f(A)$, равную мощности A/\sim ; пусть $k = \#f(A)$. Затем последовательно произведем три выбора:

1) выберем проекцию $p : A \twoheadrightarrow A/\sim$ — для этого достаточно выбрать разбиение n -множества A на k блоков — что даст $S(n, k)$ вариантов;

2) выберем биекцию между k -множествами A/\sim и $f(A)$, что даст $k!$ вариантов;

3) выберем вложение $f(A)$ в B — это даст, так как $\#f(A) = k, \#B = x$, всего C_x^k вариантов.

Подведем итог. При фиксированном k получается $S(n, k)k! C_x^k = S(n, k)(x)_k$ способов задать отображение $f: A \rightarrow B$; но k может быть различным: $k \in [1, n]$, поэтому $x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$. Сформулируем:

Т е о р е м а 3. При $n > 0$ для любого вещественного x справедливо равенство

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k.$$

◁ Данная формула доказана для всех $x \in \mathbb{N}$, но ее можно рассматривать как алгебраическое уравнение относительно неизвестной x степени $\leq n$, и поэтому оно не может иметь более n корней. Но поскольку это уравнение обращается в тождество для бесконечного множества значений x (а именно, для всех натуральных x), оно должно быть тождеством для любого x . ▷

5. Числа Стирлинга 1 рода

Ранее введенные числа $S(n, k)$ обычно называются числами Стирлинга 2-го рода. Числами Стирлинга 1-го рода $s(n, k)$ называются коэффициенты при x^k в разложении $(x)_n$:

$$(x)_n = \sum_{k=1}^n s(n, k)x^k. \quad (1)$$

Т е о р е м а 4. Числа Стирлинга 1-го рода удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1) \cdot s(n-1, k). \quad (2)$$

◁ Начнем с очевидного равенства $(x)_n = (x)_{n-1} \cdot (x - n + 1)$. Так как $(x)_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1, k) \cdot x^k$, можно записать

$$(x)_n = \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1, k) \cdot x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) s(n-1, k) x^k = \sum_{k=1}^n [s(n-1, k-1) - (n-1) s(n-1, k)] x^k. \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты при x^k в правых частях формул (1) и (3), получим (2). ▷

Очевидно, что $s(n, k) = 0$ при $k > n$, $s(n, 0) = 0$ при $n > 0$. Условимся, что $s(0, 0) = 1$.

Таблица чисел Стирлинга 1-го рода может быть построена с использованием формулы (2): очередной элемент в этой таблице получается вычитанием из элемента, стоящего выше слева, элемента, стоящего прямо над ним, умноженного на индекс строки; например, $35 = 11 - 4(-6)$.

		$s(n, k)$					
$\backslash \begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$		0	1	2	3	4	5
0		1	0	0	0	0	0
1		0	1	0	0	0	0
2		0	-1	1	0	0	0
3		0	2	-3	1	0	0
4		0	-6	11	-6	1	0
5		0	24	-50	35	-10	1

С помощью чисел Стирлинга 1-го рода получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} x(x-1) &= x^2 - x, \\ x(x-1)(x-2) &= x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x(x-1)(x-2)(x-3) &= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Упражнение 2. Найдите $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.

Упражнение 3. Докажите формулы: $s(n, n) = 1$, $s(n, n-1) = -C_n^2$, $s(n, 1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Упражнение 4. Докажите, что квадратные матрицы $S = (S(i, k))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ и $s = (s(i, k))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$, полученные из таблиц чисел Стирлинга 2 и 1 родов, невырождены и обратны друг к другу: $S = s^{-1}$.

§10. Рекуррентные уравнения

Имеется много числовых последовательностей, члены которых удовлетворяют рекуррентным соотношениям. Можно считать эти последовательности решениями соответствующих рекуррентных уравнений. Простейшими примерами являются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметическая прогрессия задается уравнением $x_n = x_{n-1} + d$ с начальным условием $x_0 = a$, решение которого определяет общий член прогрессии в виде известной формулы: $x_n = a + nd$.

Геометрическая прогрессия задается, в свою очередь, уравнением $x_n = qx_{n-1}$ и условием $x_0 = a$, решение которого дает формулу общего члена $x_n = aq^n$.

1. Числа Фибоначчи.

Числами Фибоначчи называются члены последовательности, заданной уравнением

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (1)$$

с начальными условиями $x_1 = 1, x_2 = 1$. Так как $x_2 = x_1 + x_0$, можно считать, что $x_0 = 0$. Вот первые числа Фибоначчи (обычно они обозначаются F_n):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	44	65	109	174

Для решения уравнения Фибоначчи возьмем пробный общий член в том же виде, что и для геометрической прогрессии: $x_n = aq^n$, но с неизвестными пока параметрами a и q . Подставив пробный член в уравнение (1), получим $aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2}$, а после сокращения на aq^{n-2} — квадратное уравнение $q^2 - q - 1 = 0$, которое имеет корни

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Отметим очевидные равенства $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$; приближенные значения корней $\alpha \approx 1.618$ и $\beta \approx -0.618$.

Необходимо, чтобы выполнялись условия $x_0 = 0, x_1 = 1$, но ни одно из решений не дает такой возможности, т.к. остается только один неизвестный параметр a на два начальных условия. Попробуем взять линейную комбинацию найденных решений:

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n. \quad (2)$$

Подставляя ее в уравнение (1), убедимся, что она обратит его в тождество:

$$A\alpha^n + B\beta^n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + A\alpha^{n-2} + B\beta^{n-2}.$$

Подставляя (2) в начальные условия, получим систему линейных уравнений относительно A и B :

$$A + B = 0, \quad A\alpha + B\beta = 1.$$

Отсюда $A = 1/\sqrt{5}, B = -1/\sqrt{5}$.

Таким образом, мы доказали утверждение:

Т е о р е м а 1. Числа Фибоначчи могут быть вычислены по формуле

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Эта формула носит название формулы Бине.

Т е о р е м а 2. $F_n = \text{round} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right)$, где $\text{round}(x)$ — ближайшее целое к x .

◁ F_n равно сумме двух слагаемых, причем второе $\left| \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$, так как $|\beta| < 1$, $\sqrt{5} > 2$. ▷

Упражнение 1. Найдите последовательность x_n , удовлетворяющую уравнению Фибоначчи (1), но с произвольными начальными условиями $x_1 = a$, $x_2 = b$.

2. Рекуррентные уравнения

Рекуррентным уравнением k -го порядка называется уравнение, в котором общий член последовательности x_n зависит от k предыдущих:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}). \quad (3)$$

Если правая часть $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$ линейно зависит от всех своих аргументов, уравнение называется *линейным*. Линейное уравнение k -го порядка имеет вид

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} + b, \quad (4)$$

причем $a_k \neq 0$, так как иначе порядок уравнения был бы меньше k .

Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_k и свободный член b в общем случае зависят от n : $a_i = a_i(n)$, $b = b(n)$. Если такой зависимости нет, т.е. если все коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_k и свободный член b — константы, уравнение (4) называется уравнением с *постоянными коэффициентами*.

Наконец, уравнение (4) называется *однородным*, если $b = 0$.

Общее рекуррентное уравнение k -го порядка (3) имеет своим решением единственную последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ при условии, что задано k начальных членов этой последовательности. Действительно, если заданы x_1, x_2, \dots, x_k , то однозначно можно определить $x_{k+1} = f(x_k, \dots, x_1)$, затем $x_{k+2} = f(x_{k+1}, \dots, x_2)$, и т.д.

Подробнее изучим линейные рекуррентные уравнения, и особенно — уравнения с постоянными коэффициентами.

Т е о р е м а 3. Последовательности, являющиеся решениями линейного рекуррентного уравнения (4), обладают следующими свойствами:

1) если x_n, y_n — решения линейного однородного рекуррентного уравнения, то $z_n = Ax_n + By_n$ также является решением того же уравнения;

2) если x_n, y_n — решения линейного неоднородного рекуррентного уравнения, то $u_n = x_n - y_n$ является решением соответствующего линейного однородного уравнения.

◁ 1) Так как

$$x_n = a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k}, y_n = a_1y_{n-1} + \dots + a_ky_{n-k},$$

то

$$Ax_n + By_n = A(a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k}) + B(a_1y_{n-1} + \dots + a_ky_{n-k}) = \\ = a_1(Ax_{n-1} + By_{n-1}) + \dots + a_k(Ax_{n-k} + By_{n-k}),$$

откуда следует

$$z_n = a_1z_{n-1} + \dots + a_kz_{n-k}.$$

2) Если

$$x_n = a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} + b, y_n = a_1y_{n-1} + \dots + a_ky_{n-k} + b,$$

то

$$x_n - y_n = a_1(x_{n-1} - y_{n-1}) + \dots + a_k(x_{n-k} - y_{n-k}). \triangleright$$

3. Линейные однородные рекуррентные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \dots + a_kx_{n-k} \quad (a_k \neq 0), \quad (5)$$

с начальными условиями $x_1 = v_1, x_2 = v_2, \dots, x_k = v_k$.

Метод его решения состоит в следующем. Подставим в уравнение (5) $x_n = q^n$: $q^n = a_1q^{n-1} + a_2q^{n-2} + \dots + a_kq^{n-k}$, или, после сокращения на q^{n-k} :

$$q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \dots - a_kq^0 = 0 \quad (6)$$

Это — алгебраическое уравнение k -й степени. Будем предполагать, что оно имеет k различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Тогда рекуррентное уравнение (5) имеет решения $(x_n)_1 = \alpha_1^n, (x_n)_2 = \alpha_2^n, \dots, (x_n)_k = \alpha_k^n$, а, кроме того, любое решение вида $x_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n$.

Т е о р е м а 4. При любых значениях вещественных постоянных c_1, c_2, \dots, c_k последовательность

$$x_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n \quad (7)$$

является решением линейного однородного рекуррентного уравнения (5) с постоянными коэффициентами; и, обратно, каждое решение рекуррентного уравнения (5) может быть записано в таком виде при подходящих значениях констант.

◁ Последовательность, заданная формулой (7), является решением рекуррентного уравнения (5) в силу свойства 1 из теоремы 3.

Обратно, каждое решение удовлетворяет некоторым начальным условиям $x_1 = v_1, x_2 = v_2, \dots, x_k = v_k$. Подставляя в эти условия выражение (7), определим значения констант c_1, c_2, \dots, c_k :

$$\begin{aligned} c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_k \alpha_k &= v_1, \\ c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + \dots + c_k \alpha_k^2 &= v_2, \\ \dots &\dots \\ c_1 \alpha_1^k + c_2 \alpha_2^k + \dots + c_k \alpha_k^k &= v_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим (8) как систему k линейных уравнений с k неизвестными c_1, c_2, \dots, c_k . Эта система имеет ненулевой определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \dots & \alpha_k^k \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0,$$

так как $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ (по условию все корни алгебраического уравнения (6) различны), и $\alpha_i \neq 0$ (свободный член уравнения (6) a_k отличен от нуля).

Следовательно, система (8) имеет единственное решение, определяющее коэффициенты в (7). ▷

Пример. Вычислим определитель n -го порядка с нулями вне главной и соседних с ней диагоналей

$$\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots \\ a & b & c & 0 & \dots \\ 0 & a & b & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = x_n.$$

Раскрывая его по первой строке, получим рекуррентную зависимость:

$$x_n = bx_{n-1} - acx_{n-2}. \quad (9)$$

Корни соответствующего квадратного уравнения $q^2 - bq + ac = 0$ имеют вид $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$. Начальные условия найдем, вычисляя определитель в случае $n = 1$ и $n = 2$: $x_1 = b, x_2 = b^2 - ac$. Из рекуррентного уравнения (9) выведем $x_0 = 1$.

Теперь, пользуясь начальными условиями, можно найти неопределенные коэффициенты A и B в общем решении $x_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Сделаем это при конкретных значениях: $a = 1, b = 5, c = 4$: корни квадратного уравнения $q^2 - 5q + 4 = 0$: $\alpha = 1, \beta = 4$; общее решение рекуррентного уравнения $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n$; так как $x_0 = 1, x_1 = 5$, для определения коэффициентов A и B получим систему

$$A + B = 1, \quad A + 4B = 5.$$

Ее решение: $A = -\frac{1}{3}, B = \frac{4}{3}$ позволяет записать окончательный ответ:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots \\ 1 & 5 & 4 & \dots \\ 0 & 1 & 5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Задачи

Какие из утверждений верны для всех A, B и C :

- | | |
|-----------------------------|--|
| а) $A \subset A$; | д) $\emptyset \neq \{\emptyset\}$; |
| б) $A \cap B \subset A$; | е) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$; |
| в) $A \cup B \subset A$; | ж) если $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$; |
| г) $A \Delta B \subset A$; | з) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$? |

Решить системы уравнений для данных множеств A и B :

- | | |
|--|--|
| а) $A \cap X = B, (B \subset A \subset C);$ | в) $A \setminus X = B, (B \subset A \subset C).$ |
| $A \cup X = C;$ | $A \cup X = C;$ |
| б) $A \setminus X = B, (B \subset A, A \cap C = \emptyset);$ | |
| $X \setminus A = C.$ | |

Существуют ли такие множества A, B и C , что

- | | | |
|------------------------------|---------------------------|--|
| а) $A \cap B = \emptyset,$ | б) $A \cup B = B \cap C,$ | в) $A \cap B \neq \emptyset,$ |
| $C \setminus B = \emptyset;$ | $A \cap B = B;$ | $A \cap C = \emptyset,$ |
| | | $(A \cap B) \setminus C = \emptyset ?$ |

Доказать тождества:

- | |
|---|
| а) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset;$ |
| б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C;$ |
| в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C);$ |

- г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
- д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
- е) $A \Delta (A \Delta B) = B$;
- ж) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
- з) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Доказать:

- а) $A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$;
- б) $A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C$;
- в) $A \subset B \implies C \setminus B \subset C \setminus A$;
- г) $A \cap B = \emptyset \implies A \Delta B = A \cup B$;
- д) $A \cup B \Delta (C \cup D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D)$;
- е) $A \Delta B = C \iff B \Delta C = A \iff A \Delta C = B$.

80% студентов читают журнал А, 50% — журнал В, также 50% — журнал С, 30% — журналы А и В, 20% — журналы В и С, 40% — журналы А и С, 10% — все три журнала. Сколько процентов студентов: а) не читает ни одного журнала; б) читает в точности два журнала; в) читает не менее двух журналов; г) читает один или два журнала?

Коллектив лаборатории состоит из 14 человек, каждый из которых знает хотя бы один из иностранных языков. Десять человек знают английский, семеро — французский и семеро — немецкий, пятеро знают английский и французский, четверо — английский и немецкий, трое — французский и немецкий. Сколько человек знают: а) все три языка; б) ровно два языка; в) ровно один язык; г) только английский язык?

Дано множество $A = [0, 9]$ и свойства:

$P_1 : a$ кратно 3; $P_2 : a$ кратно 5; $P_3 : 2 \leq a < 7$; $P_4 : a^2 + a > 4$.
Сколько элементов обладают в точности 0,1,2,3 или 4 свойствами?

Сколько 3-значных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

а) если каждую можно использовать не более одного раза?

Сколько имеется 5-значных чисел, у которых все цифры нечетные?

Сколько разных делителей имеет число $3^5 \cdot 5^4$?

Из двух вершин треугольника проведено соответственно m и n прямых до пересечения с противоположными сторонами. Сколько при этом получится точек пересечения проведенных прямых? На сколько частей разделится треугольник?

Автомобильные номера состоят из 1, 2 или 3 букв и 4 цифр; используется 30 букв. Найти число таких номеров.

Одновременно подбрасывается 3 фишки с 6, 8 и 10 гранями соответственно и фиксируются грани, которыми они упадут на стол. Сколькими способами они могут упасть?

а) Тот же вопрос при условии, что по крайней мере 2 фишки упали на сторону с цифрой 1.

Имеется 5 книг на английском языке, 7 на немецком, 10 на французском. Сколькими способами можно выбрать 2 книги на разных языках?

На собрании должны выступить 4 оратора. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если первый не должен выступать после второго, а третий не должен выступать последним?

Доказать: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Доказать: $P(A \cup B) = \{K \cup L \mid K \in P(A), L \in P(B)\}$.

Сколько подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c, d\}$? Выписать их; построить диаграмму Хассе для отношения включения \subset .

Составить диаграмму Хассе для множества $[2, 9]$, упорядоченного отношением делимости.

Сколько имеется 3-значных чисел, составленных с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делящихся на 3?

Сколько существует подмножеств множества $[1, 10]$, содержащих хотя бы одно нечетное число?

Сколько 3-подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c, d, e\}$? Выписать их.

Вычислить C_8^k для $0 < k < 8$.

Доказать $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < (n-1)/2$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > (n-1)/2$.

Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

На плоскости проведено n прямых так, что никакие 2 из них не параллельны и никакие 3 из них не пересекаются в одной точке.

а) Найти количество точек пересечения этих прямых.

б) Сколько треугольников образуют эти прямые?

- в) На сколько частей делят плоскость эти прямые?
г) Сколько среди них ограниченных частей и сколько — неограниченных?

Сколько имеется способов написать последовательность из p единиц и q нулей так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

Сколько кратчайших путей ведут из точки $(0,0)$ в точку $(4,5)$?

Никакие 3 диагонали выпуклого 10-угольника не пересекаются в одной точке. На сколько отрезков диагонали делятся точками пересечения?

- а) Тот же вопрос для n -угольника.

Сколькими способами из множества $[1, 300]$ можно выбрать 3 числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Колода карт содержит 4 масти по n карт ($n \leq 5$) в каждой с номерами $1, 2, \dots, n$. Подсчитайте, сколькими способами можно выбрать 5 карт, что среди них окажутся:

- а) пять последовательных карт одной масти;
б) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;
в) три карты с одним номером и две карты с другим;
г) пять карт одной масти;
д) пять последовательно занумерованных карт;
е) три карты из пяти с одинаковыми, а остальные с разными номерами;
ж) две карты из пяти с одинаковыми, а остальные с разными номерами.

Сколько имеется перестановок множества $[1, 2n]$, в которых каждое четное число стоит на четном месте?

Сколько существует перестановок из n элементов, в которых данные 2 элемента не стоят рядом?

Подсчитать число перестановок множества $[1, n]$, у которых числа $1, 2, 3$ стоят рядом в порядке возрастания?

Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами стоят r элементов?

Сколько имеется подстановок из 4 элементов a, b, c, d , если b должно следовать не ранее a ?

- а) то же для n элементов.

Подсчитайте число способов переставить элементы множества $[1, n]$ так, чтобы любое число, кратное 2, имело бы номер, кратный 2, а любое число, кратное 3, — номер, кратный 3.

Сколько существует перестановок множества $[1, 7]$, у которых 7 не остается на месте?

Перечислить все 3-мультимножества на множестве $\{a, b, c\}$.

Сколько всего можно сделать костей домино, если на каждой половине кости должна быть пометка, соответствующая числам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6? То же для чисел $1, 2, \dots, k$.

В буфете продается 4 сорта пирожных. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

12 человек разбились на 5 групп, каждая из 2 или 3 человек. Сколькими способами это можно сделать?

Сколько разложений числа 19 можно составить из чисел 2 и 3?

Сколько разложений числа 18 можно составить из 4, 6 и 10?

Сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n$? В частности, при $n = 3$ выписать все решения.

Сколько имеется способов разделить $m + n + s$ предметов на 3 группы, чтобы в 1-й было m предметов, во 2-й — n , а в 3-й — s ?

Каким числом способов можно разделить $3n$ различных предметов между 3 людьми, чтобы каждый получил поровну?

Сколько перестановок можно составить из букв слов: а) „кок“, б) „мама“, в) „канкан“, г) „олово“, д) „математика“?

Доказать:

а) $(k)!/(k!)^{(k-1)}$ — целое;

б) $(2n)!/2^n$ — целое;

в) $(3n)!/(2^n \cdot 3^n)$ — целое.

Сколько 5-буквенных сочетаний можно составить из букв a, b, c так, чтобы буква a встречалась не более 2 раз, буква b — не более 1 раза, c — не более 3 раз?

а) Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, содержащих четное число 0?

б) Сколько существует последовательностей длины n с элементами из множества $\{0, 1, 2\}$, содержащих четное число 0?

в) Сколько существует последовательностей длины n с элементами из множества $\{0, 1, 2, 3\}$, содержащих четное число 0 и четное число 1?

Доказать: если p — простое число, то $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$ делятся на p .

Доказать: если p — простое число, то при любом целом a двучлен $a^p - a$ делится на a .

Найти n , если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и при x^{12} равны.

Сколько в разложении $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ будет рациональных слагаемых?

Найти $(x+y+z)^3$.

Найти $(a+b+c+d)^2$.

Найти в разложении $(x+y+z)^7$ коэффициент при $x^2y^3z^2$. Сколько всего слагаемых в $(x+y+z)^7$?

Найти коэффициент при $x^k y^l$ в $(1+x+y)^n$.

Найти коэффициенты при x^{17} и x^{18} в $(1+x^5+x^7)^n$.

Доказать:

$$P_{n+1}(i, j, k) = P_n(i-1, j, k) + P_n(i, j-1, k) + P_n(i, j, k-1),$$

где $i+j+k = n+1$.

$$\text{Доказать: } \sum_{i+j+k=n} P_n(i, j, k) = 3^n.$$

Доказать следующие тождества:

$$C_n^k C_n^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r.$$

$$C_n^{k-r} / C_n^k = \frac{(k)_r}{(n-k+r)_r}.$$

$$C_{n-r}^{k-r} / C_n^k = \frac{(k)_r}{(n)_r}.$$

$$C_{n+1}^k / C_n^k = \frac{n+1}{n-k+1}.$$

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

$$C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0.$$

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}.$$

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) C_n^k = (n+1) 2^n.$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n+1) 2^{n-2}.$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}.$$

Найти сумму:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}.$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

Доказать тождества:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}.$$

$$C_n^k + C_{n+1}^k + \dots + C_{n+m}^k = C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}.$$

$$(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots + (-1)^n (C_n^n)^2 = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & n = 2k. \end{cases}$$

$$\sum_{i=k-3}^{n-3} C_i^{k-3} C_{n-1-i}^2 = C_n^k.$$

Доказать:

Пусть A, B, C, D не пусты. Тогда

а) $A \subset B, C \subset D \iff A \times C \subset B \times D;$

б) $A = B, C = D \iff A \times C = B \times D;$

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D). \text{ При каких } A, B, C, D$$

будет равенство?

$$(A \cup B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C).$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Установить взаимно однозначное соответствие между $A \times B$ и $B \times A$. Найти A, B такие, что $A \times B \neq B \times A$.

Доказать для \leq и $<$ на множестве $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$< \cdot < \neq < \cdot; \leq \cdot \leq < \cdot; \leq \cdot \geq = \mathbb{N}^2.$$

Найти $R^{-1}, R \cdot R, R \cdot R^{-1}, R^{-1} \cdot R$ для

а) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \mid y\};$

- б) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0\}$;
 в) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 2x \geq 3y\}$.

Доказать:

- а) $R_1 \subset R_2 \implies R_1^{-1} \subset R_2^{-1}$;
 б) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
 в) $\overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$;
 г) $Q \cdot (R_1 \cap R_2) \subset Q \cdot R_1 \cap Q \cdot R_2$.

Проверьте выполнение свойств отношения эквивалентности для отношения R , заданного следующим образом:

- а) aRb , если $a - b$ делится на m ($a, b, m \in \mathbb{N}$);
 б) aRb , если a и b — параллельные прямые;
 в) aRb , если $a - b$ — рациональное число.

Постройте бинарное отношение:

- а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;
 б) рефлексивное, транзитивное, не симметричное;
 в) симметричное, транзитивное, не рефлексивное.

Пусть $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Выписать все пары (a, b) такие, что $a \mid b$, $a, b \in N_4$.

Найти декартов квадрат N_4^2 .

В следующих четырех задачах исследовать заданные отношения на свойства рефлексивности, транзитивности, симметричности, антисимметричности:

$$a \ll b, \text{ если } \frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{b}{b^2 + 1}:$$

- а) на множестве вещественных чисел \mathbb{R} ;
 б) на интервале $(1, \infty)$;
 в) на $[1, \infty)$, $(-1, 1)$, $[-1, 1]$, $(-\infty, -1]$, $(-\infty, 0)$.
 $a\sigma b$, если $a \leq 1$ или $b \geq -1$, на множестве \mathbb{R} .

$A\tau B$, если A и B — точки плоскости, находящиеся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки O этой же плоскости.

Отношение делимости \mid на $N_4, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

На множестве $\{a, b\}$ найти все возможные отношения; выделить из них все

- а) рефлексивные; б) симметричные; в) антисимметричные; г) транзитивные; д) эквивалентности; е) частично упорядоченные; ж) линейно упорядоченные.

Найти все эквивалентности на множестве

- а) $\{a, b, c\}$; б) $\{a, b, c, d\}$.

Начертить диаграммы Хассе

- а) множества N_4 с отношением делимости $|$;
 б) множества всех отношений на $\{a, b\}$, упорядоченного включением;
 в) множества всех эквивалентностей на $\{a, b, c\}$, упорядоченного включением.

Найти общее решение уравнения, а также частное решение, если указаны дополнительные условия.

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0.$$

$$x_{n+2} + 3x_n = 0.$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0.$$

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0.$$

$$x_{n+3} + 10x_{n+2} + 32x_{n+1} + 32x_n = 0.$$

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad x_0 = c.$$

$$x_{n+1} = 3x_n + 2, \quad x_0 = 1.$$

$$x_{n+1} = x_n + n, \quad x_0 = 1.$$

$$x_{n+2} = x_n + n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 2.$$

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = 27 \cdot 5^n, \quad x_0 = -9, \quad x_2 = 45.$$

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} - 3x_n = 0, \quad x_0 = 3, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 27.$$

$$x_{n+3} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_2 = c.$$

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 6n^2 - 4n - 17, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 15,$$

$$x_3 = 41.$$

Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Доказать методом математической индукции

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

$$C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots = F_n.$$

Список литературы

- Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. — М.: ИЛ, 1963.
- Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. — М.: Наука, 1990.
- Горбатов В.А. Основы дискретной математики. — М.: Высш. шк., 1986.
- Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
- Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.
- Виленкин Н.Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
- Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. — Новосибирск: Наука, 1975.
- Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.
- Липский В. Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988.
- Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977.
- Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения/Под ред. К.А. Рыбникова. — М.: Наука, 1982.
- Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1984.

Содержание

§1. Множества и операции над ними	5
§2. Подмножества и сочетания	11
§3. Упорядоченные множества и размещения	16
§4. Отображения	21
§5. Мультимножества	28
§6. Биномиальная и мультиномиальная формулы	32
§7. Бинарные отношения	36
§8. Отношения эквивалентности и разбиения множеств	41
§9. Естественная факторизация отображений	45
§10. Рекуррентные уравнения	51
Задачи	56
Список литературы	65