В.В.Капитоненко

# ЗАДАЧИ И ТЕСТЫ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

$$I(0)=\sum_{\textit{инвестиции}} I_t\,(1+i)^{-t}$$

$$S(n)=\sum_{\textit{доходы}} E_t\,(1+i)^{n-i}$$

В.В.Капитоненко

# Задачи и тесты по финансовой математике

Допущено
Советом Учебно-методического объединения вузов России
по образованию в области менеджмента
в качестве учебного пособия
по специальности "Информационный менеджмент"

МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
2007

УДК [336:51](076.1)
ББК 65.26в631я73
К20

*РЕЦЕНЗЕНТЫ:*

**Кафедра менеджмента и информационных технологий**
Московского государственного университета леса;
**Н.П. Тихомиров,**
доктор экономических наук, профессор,
декан экономико-математического факультета
Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова

**Капитоненко В.В.**
К20 Задачи и тесты по финансовой математике: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 256 с.: ил.

ISBN 978-5-279-03182-5

Включены задачи по основным разделам финансовой математики: потоки платежей, кредитные расчеты, анализ инвестиционных проектов, оценки курсов и доходностей ценных бумаг, измерение финансового риска и формирование портфеля инвестора. Каждый раздел содержит четыре типа задач: расчетные, аналитические, ситуационные и задачи-тесты. В начале раздела даются основные понятия и формулы, примеры их применения для решения типовых задач. Все задания в зависимости от их характера снабжены ответами или решениями.

Для студентов и преподавателей экономических вузов, а также для широкого круга специалистов, применяющих финансовую аналитику в своей практической деятельности.

К $\frac{1602020000 - 020}{010(01) - 2007}$ 73 – 2006

УДК [336:51](076.1)
ББК 65.26в631я73

ISBN 978-5-279-03182-5

© Капитоненко В.В., 2007

## Содержание

# Предисловие

Финансы – один из ключевых факторов экономики. Органы государственного управления, деловые фирмы и предприятия, домашние хозяйства – все они независимо от масштабов своей деятельности для ее успешного ведения должны данный фактор учитывать и уделять ему первостепенное внимание. Это в полной мере относится и к управленческим кадрам, которые в своей профессиональной деятельности имеют дело с денежными потоками предприятия и могут влиять на его финансовое состояние.

В качестве количественной основы финансового анализа, а также решений по финансированию, инвестициям, кредитам, займам и т. д. выступают правила и методы финансовой математики: арифметики, алгебры, оптимизации, в том числе при риске и неопределенности. Ее изучение, как и изучение математики вообще, невозможно без решения учебных задач. На пути к правильному ответу будущий менеджер приобретает необходимые навыки и умения, нацеленные на практическое использование полученных в вузе знаний.

Данное учебное пособие написано на основе курсов, читаемых автором в Государственном университете управления по специальностям «Информационный менеджмент» и «Математические методы в экономике». Вместе с тем содержащиеся в нем задачи и справочные материалы будут полезны и для других направлений менеджмента, а также широкому кругу специалистов, использующих финансовую аналитику в практических приложениях.

Предлагаемый сборник состоит из шести разделов и приложения и содержит задачи по основным разделам финансовой математики: потоки платежей, кредитные расчеты, анализ инвестиционных проектов, оценки курсов и доходностей ценных бумаг, измерение финансового риска и формирование портфеля инвестора. В приложение включены контрольные вопросы по дисциплине в целом и информация о возможностях программного продукта «eTest» для проведения тестирования на компьютере.

В начале каждого тематического раздела даны необходимые теоретические сведения, используемые при решении задач, и типовые примеры. Затем идут задания для самостоятельной работы, которые сгруппированы по четырем видам. Первый из них содержит расчетные задачи на формально-математическое применение формул и основных уравнений, позволяющие закрепить теоретический материал. В следующей группе собраны задания, где требуется вывести алгебраические соотношения, пригодные для анализа и вычислений при различных значениях параметров исходной постановки. Их выполнение способствует развитию навыков математической формализации финансовых задач и получения формул для проведения многовариантных расчетов. Вслед за ними даны финансовые задачи, которые в занимательной форме излагают требующие разрешения проблемные ситуации. В завершение предлагаются тесты, где оценка знаний по теме проводится на основе выбора правильных ответов из ряда предложенных. Все задачи в зависимости от трудности снабжены ответами, необходимыми указаниями или решениями, которые приводятся в конце раздела.

Требуемые для расчетных задач вычисления могут проводиться «вручную» с помощью финансовых таблиц, а для повышенной сложности – с использованием Excel. Студент, знакомый с основами практической работы с этим программным продуктом, в состоянии, опираясь на знания терминов финансовой математики, самостоятельно освоить обеспечиваемые им финансовые функции. В пособии не дается облегчающих расчеты таблиц, так как имеется достаточно книг, где они содержатся; например [4, 5, 9, 11]. Кроме того, необходимые табличные значения можно оперативно получить с помощью Excel.

Автор выражает благодарность студентам Государственного университета управления, способствовавшим своей активной работой на практических занятиях формированию данного сборника, и всем коллегам за помощь в подготовке рукописи.

# Раздел 1
# РАЗОВЫЙ ПЛАТЕЖ

## 1.1. Основные понятия и формулы

**Правила приведения во времени.** Согласно принципу временной неравноценности денег равновеликие, но разновременные денежные суммы оцениваются по-разному. Это свойство финансовых сопоставлений лежит в основе правил приведения денег во времени. В будущем денежные эквиваленты увеличиваются и отвечающие им суммы рассчитываются по формулам наращения. «Попятное» движение сопровождается снижением равноценных выплат, для определения которых используют формулы дисконтирования.

Общим правилам наращения и дисконтирования для произвольного срока предпошлем частный случай приведения на единичном периоде. В зависимости от того, величина какого из концевых платежей считается базовой, т. е. принимается за 100%, различают два варианта: 1) приведение по ставке начисления; 2) приведение соответственно ставке удержания процентов.

Вариант 1.

Пусть в качестве базовой рассматривается величина $P_0$ в начале периода. Тогда ставкой приведения $r$% считается ставка начисления процента, т. е. тот процент, на который увеличится начальная сумма $P_0$ за один период. В результате наращенная за один период сумма $P_1$ составит величину:

$$P_1 = P_0(1+\frac{r}{100}) = P_0(1+i),$$

где $i = \frac{r}{100}$ – дробное измерение ставки.

Дисконтирование по этой ставке, называемой в этой связи еще и ставкой дисконтирования, заключается в приведении поздней выплаты $P_1$ к предшествующему эквиваленту $P_0$:

$$P_0 = \frac{P_1}{(1+i)}.$$

Вариант 2.

Пусть за базовую принята величина $P_1$ в конце периода. Тогда ставкой приведения $q\%$ является ставка удержания процентов, ее еще называют учетной ставкой, т. е. тот процент, на который уменьшится финальная сумма $P_1$ на один период «назад». В этом случае процедура дисконтирования определяется формулой

$$P_0 = P_1(1 - \frac{q}{100}) = P_1(1 - j),$$

где $j = \frac{q}{100}$ – дробное измерение ставки.

Наращение по этой ставке, называемой еще ставкой наращения по учетному проценту, заключается в приведении ранней выплаты $P_0$ к последующему эквиваленту $P_1$:

$$P_1 = \frac{P_0}{(1 - j)}.$$

По отношению к другим периодам («вперед» или «назад») формулы приведения определяются принятым правилом начисления (удержания) процентов: простых или сложных.

Согласно простым процентам приросты (удержания) денежных сумм на любом периоде составляют одну и ту же долю базовой величины. Отсюда получаются следующие формулы простых процентов:

$P_n = P_0(1 + ni)$ – наращение по простому проценту;

$P_0 = \frac{p_n}{(1 + ni)}$ – дисконтирование по простому проценту;

(1.1)

$P_n = \frac{p_0}{(1 - nj)}$ – наращение по учетной ставке простого процента;

$P_0 = P_n(1 - nj)$ – дисконтирование по учетной ставке простого процента.

Для сложных процентов одна и та же ставка берется не от базовой величины, а от результата предыдущего во времени приведения. В результате придем к формулам сложных процентов:

$P_n = P_0(1 + i)^n$ – наращение по сложному проценту;

$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n}$ – дисконтирование по сложному проценту;

$$(1.2)$$

$P_n = \frac{p_0}{(1-j)^n}$ – наращение по учетной ставке сложного процента;

$P_0 = P_n(1 - j)^n$ – дисконтирование по учетной ставке сложного процента.

Коэффициенты приведения денежных сумм в (1.1) и (1.2) называют множителем наращения $\lambda(n; i)$ и дисконтным множителем $\gamma(n; i)$, а промежуток приведения $n$ измеряют в долях единичного периода, например года.

**Приведение в «дробном» времени.** Начисление процентов за дробное число лет может выполняться двумя методами:

1) по формуле сложных процентов:

$$S = P_0(1 + i)^{a + b};$$

2) смешанным методом:

$$S = P_0(1 + i)^a(1 + bi).$$

В этих формулах $(a + b)$ – период приведения, $a$ – целое число лет, $b$ – дробная часть года.

**Правила приведения в непрерывном времени.** В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированный промежуток времени (год, полугодие, квартал и т.д.). В некоторых случаях – для экономического анализа и в расчетах, связанных с непрерывными процессами, в математическом моделировании, а иногда и на практике – возникает необходимость в применении непрерывных процентов.

Правилу начисления по непрерывной ставке сложного процента отвечает такое изменение наращиваемой суммы $S(t)$, при котором ее «привес» – процентные деньги за малый промежуток $\Delta t$ – будет пропорционален длине этого промежутка и денежной сумме на его начало с коэффициентом пропорциональности $\delta$:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \delta S(t)\Delta t.$$

Этому соотношению в непрерывном времени соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{dS}{dt} = \delta S(t)$$

с начальным условием $S(0) = S_0$. Откуда получим следующие формулы наращения и дисконтирования:

$$S(t) = S_0 e^{\delta t},\ S_0 = S(t)e^{-\delta t}. \tag{1.3}$$

Процентная ставка $\delta$ при непрерывном наращении имеет особое название – силы роста.

Согласно правилу простого процента непрерывно начисляемые проценты пропорциональны длительности времени начисления $\Delta t$ и начальной сумме $S(0) = S_0$, т.е.

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \delta S(0)\Delta t.$$

Предельным переходом при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dS}{dt} = \delta S(0).$$

Решая это уравнение при условии $S_0$, придем к формуле непрерывного наращения по простому проценту:

$$S(t) = S_0(1 + \delta t).$$

**Эквивалентные процентные ставки. Эффективная ставка.** Пусть разнородные процентные ставки (простая, сложная, учетная и т. д.) в конкретных условиях сделки приводят к одному и тому же финансовому результату. В этом случае они являются эквивалентными. Принцип эквивалентности ставок лежит в основе многих методов количественного финансового анализа. В частности, он позволяет перейти к единообразному показателю для сопоставимого оценивания эффективности финансовых операций.

В качестве такого показателя широко используют эффективную ставку, которая оценивает финансовую операцию годовой ставкой сложных процентов. Иначе говоря, эффективной ставкой $r_{ef}$ называется годичная ставка сложных процентов, дающая то же соотношение между исходной суммой $S_0$ и результирующей суммой $S_T$, которая получена при любой схеме выплат. Формула эффективной ставки следует из этого определения:

$$S_0(1 + r_{ef})^T = S_T.$$

Откуда

$$r_{ef} = \left[\frac{S_T}{S_0}\right]^{\frac{1}{T}} - 1, \tag{1.4}$$

где $T$ – время (в годах), за которое получен доход.

Согласно схеме $m$-кратной капитализации на первоначальную сумму $S_0$ в течение года начисляются проценты по годовой ставке $i$, причем число периодов начисления равно $m$. Будучи продолжено на $T$ лет, такое реинвестирование даст результат

$$S_T = S_0(1 + i/m)^{mT}.$$

Отсюда, пользуясь определением эффективной ставки, найдем ее зависимость от номинальной ставки $i$:

$$r_{ef} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1. \tag{1.5}$$

Таким образом, эффективная ставка измеряет тот относительный доход $(S_{T=1} - S_0)/S_0$, который может быть получен в целом за год, т.е. сторонам безразлично, применять ли ставку $i$ при начислении процентов $m$ раз в год или годовую ставку $r_{ef}$ – и та и другая эквивалентны в финансовом отношении. Заметим, что при увеличении частоты капитализации $m$ период начисления становится все меньше и мы приближаемся к непрерывному наращению процентов. В пределе при $m$, стремящемся к бесконечности, получим формулы непрерывного приведения (1.3) с силой роста $\delta$, равной номинальной ставке $i$ ($\delta = i$). Пользуясь определением (1.4), найдем эффективную ставку, эквивалентную непрерывному наращению с силой роста $\delta$: $r_{ef} = e^{\delta} - 1$. Отсюда следует, что $\delta = \ln(r_{ef} + 1)$, т. е. операция приведения (дисконтирования, наращения) на $n$ периодов по сложному проценту со ставкой $r_{ef}$ равносильна приведению в непрерывном времени с силой роста $\delta$.

**Наращение процентов и инфляция.** Инфляция проявляется в росте цен $P_t$ и может измеряться темпом их прироста $r$, а также периодом $T$, за который они удвоятся. Первый показатель называют темпом инфляции. Он характеризует относительное изменение цены за один период:

$$r = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}.$$

Отсюда следует возможность описания роста цен правилом сложных процентов. Так, при сохраняющемся темпе инфляции

$$P_t = P_0(1 + r)^t.$$

Определим число лет $T$, необходимых для двукратного подорожания. В этом случае

$$2 = (1 + r)^T$$

и

$$T = \frac{\ln 2}{r} = \frac{100 \ln 2}{r\%}.$$

Для грубых прикидок числа лет удвоения можно воспользоваться правилом числа 70:

$$T \approx \frac{70}{\text{темп инфляции в процентах}} = \frac{70}{r\%}. \qquad (1.6)$$

Это правило получается из формулы удвоения заменой ln2 его приближенным значением: $\ln 2 \approx 0{,}7$. Очевидно, что данные формулы можно использовать и для отрицательного темпа ($r < 0$), т. е. когда имеет место не прирост, а снижение.

В финансовой практике инфляцию учитывают, корректируя ставку начисления процентов таким образом, чтобы компенсировать обесценивание наращенной суммы из-за роста цен. Чтобы номинальная ставка $j$ при годовой инфляции $r$ соответствовала реальной ставке $i$, она должна удовлетворять условию

$$j = i + r + ir. \qquad (1.7)$$

При невысокой инфляции произведением в формуле (1.7) можно пренебречь. В этом случае поправка на инфляцию ограничивается величиной темпа $r$, и ставку корректируют по формуле

$$j = i + r. \qquad (1.8)$$

## 1.2. Типовые примеры

Правила простых и сложных процентов (1.1), (1.2) выражаются формулами, в которые входят следующие показатели: начальная сумма $P_0$, конечная сумма $P_n$, процентная ставка начисления $i$ или ставка удержания (учетная) $j$, промежуток времени $n$ между исходной и замыкающей суммами $P_0$ и $P_n$. Итого четыре параметра. Пусть любые три из них заданы, тогда формула, соответствующая применяемому правилу и используемой ставке (начисления или учетной), дает уравнение для отыскания недостающего параметра при известных трех. Возникающие при этом четыре варианта задач для случая начисления по ставке $i$ представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

| Исходные данные | Искомая величина | Тип задачи |
|---|---|---|
| $P_0, n, i$ | $P_n$ | Отыскание наращенной суммы |
| $n, i, P_n$ | $P_0$ | Отыскание современной величины |
| $P_0, P_n, i$ | $n$ | Отыскание срока приведения |
| $P_0, P_n, n$ | $i$ | Отыскание ставки начисления |

Разумеется, при переходе на учетную ставку $j$ типы задач будут те же, изменятся лишь базовые формулы, необходимые для их решения.

1. *Отыскание наращенной суммы.*

В какую сумму обратится через 5 лет долг, равный 10 тыс. руб., при росте по сложной ставке 5,5%? Чему равны процентные деньги?

Примечание. Под процентными деньгами, или, кратко, процентами, понимают величину прироста денежной суммы: $I_n = P_n - P_0$.

Решение

$$P_5 = 10000(1 + 0{,}055)^5 = 10000 \cdot 1{,}30696 \approx 13070;$$
$$I_n = 13070 - 10000 = 3070.$$

2. *Отыскание современной величины.*

Сумма в 5 млн руб. выплачивается через 5 лет. Какова ее современная величина при условии, что применяются сложные проценты по ставке 10% годовых?

Решение

$$P_0 = 5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0{,}1)^{-5} = 5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}620921 = 5 \cdot 620921 = 3104605.$$

3. *Отыскание срока приведения.*

Каким должен быть срок ссуды в днях, для того чтобы долг, равный 100 тыс. руб., вырос до 120 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых?

Решение

$$100 \cdot (1 + n \cdot 0{,}25) = 120.$$

Откуда $n = \frac{4}{5}$ года или в днях:

$$n = 365 \cdot \frac{4}{5} = 292 \text{ дня}.$$

4. *Отыскание ставки начисления.*

При двух одинаковых процентных повышениях заработная плата с 10 тыс. руб. обратилась в 12544 руб. Определите, на сколько процентов повышалась она каждый раз?

Решение

$$12544 = 10000 \cdot (1 + i)^2.$$

Откуда

$$1 + i = \sqrt{\frac{12544}{10000}} = \frac{112}{100} = 1 + 0{,}12,$$

и поэтому $i = 12\%$.

Для переменной во времени процентной ставки базовые формулы (1.1), (1.2) переписываются с учетом их изменения на присоединяемых периодах.

5. *Переменные процентные ставки.*

Клиент положил в банк 10 тыс. руб. сроком на один год. Согласно депозитному договору годовая процентная ставка до середины второго квартала составляет 30%, далее до конца третьего квартала – 25%, а с начала четвертого квартала – снова 30%.

Какую сумму клиент получит в конце года при условии, что договор предусматривает начисление

а) по простым процентам;

б) по сложным процентам?

Решение

В этой задаче периоды начисления в долях года равны следующим значениям:

$$n_1 = n_2 = {}^1/_4 + {}^1/_8 = {}^3/_8 \text{ (года)};\ n_3 = {}^1/_4 \text{ (года)}.$$

Подставляя их в формулу для простого процента, получим:

$$10000(1 + {}^3/_8 \cdot 0{,}3 + {}^3/_8 \cdot 0{,}25 + {}^1/_4 \cdot 0{,}3) = 12812{,}5 \text{ руб.};$$

аналогично для сложного процента будем иметь:

$$10000(1 + {}^3/_8 \cdot 0{,}3)(1 + {}^3/_8 \cdot 0{,}25)(1 + {}^1/_4 \cdot 0{,}3) = 13080{,}57 \text{ руб.}$$

Приведем примеры, при решении которых можно воспользоваться понятием эффективной ставки.

6. *Эквивалентная непрерывная ставка.*

Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20%?

Решение

$$e^{\delta} = (1 + 0{,}2 / 4)^4.$$

Откуда

$$\delta = 4\ln(1 + 0{,}05) = 4 \cdot 0{,}04879 = 0{,}19516 \approx 19{,}52\%.$$

7. *Непрерывный сложный процент.*

Пусть сила роста (непрерывный темп прироста) изменяется во времени по линейному закону

$$\delta_t = \delta_0 + at,$$

где $\delta_0$ – начальное значение;

$a$ – годовой прирост (он может быть как положительным, так и отрицательным).

Получить формулу наращенной суммы $S(t)$ при величине вклада $S_0$.

Решение

Согласно определению силы роста

$$\frac{\frac{dS}{dt}}{S(t)} = \delta_0 + at, \text{ или } \frac{dS}{S} = \delta_0 + at.$$

Решая это дифференциальное уравнение с исходным условием $S_0$, получим:

$$S(t) = S_0 e^{\delta_0 t + \frac{at^2}{2}},$$

где $q(t) = e^{\delta_0 t + \frac{at^2}{2}}$ – множитель наращения.

**8.** *Эффективная ставка как результат кратной капитализации.*

Ежемесячный темп инфляции составляет 10%. Рассчитайте оценку годовой инфляции.

Решение

Исходя из месячного темпа прироста цены найдем, опираясь на принцип капитализации, годовой индекс цены и годовой темп инфляции:

$\mathrm{Ind} = (1 + 0{,}1)^{12} = 3{,}1384$, $r_{\text{год}} = \mathrm{Ind} - 1 = 2{,}1384$, т.е. 213,84%.

**9.** *Сравнение финансовых операций с помощью эффективной ставки.*

Что выгоднее: вложить 20 тыс. руб. на 1 месяц под годовую ставку 12% или на 6 мес. под 12,2%?

Решение

Найдем для каждого варианта эквивалентную ему эффективную процентную ставку:

$$r_1 = (1{,}01)^{12} - 1 = 0{,}1268 = 12{,}68\%;$$

$$r_2 = (1{,}061)^2 - 1 = 0{,}1257 = 12{,}57\%.$$

Очевидно, что из двух вариантов выгоднее тот, для которого эта ставка будет больше. В нашем случае это первый вариант, который и следует предпочесть.

**10.** *Учет инфляции.*

Какую ставку $j$ должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась 6%?

Решение

По формуле (1.7) требуемая номинальная ставка равна:

$$j = 0{,}06 + 0{,}12 + 0{,}6 \cdot 0{,}12 = 0{,}1872 = 18{,}72\%.$$

Для получения приближенного решения можно воспользоваться оценкой (1.8) и прийти к достаточно точному значению:

$$j \approx 0{,}06 + 0{,}12 = 0{,}18 = 18\%.$$

**11.** *Правило числа 70.*

Какой среднегодовой темп прироста валового внутреннего продукта (ВВП) обеспечит через 10 лет его удвоение?

Решение

Для отыскания темпа $x\%$ воспользуемся правилом числа 70, которое запишем в виде уравнения:

$$\frac{70}{x\%} = 10.$$

Откуда $x = \frac{70}{10} = 7\%$, иначе говоря, экономика в среднем должна расти на 7% ежегодно, чтобы через десять лет произошло ее удвоение.

## 1.3. Задачи для самостоятельного решения

### Расчетные задачи

**1.** Первоначально цену товара снизили на 10%, затем – на 20%, потом еще на 25%. На сколько всего процентов снизили цену?

**2.** Имеются два обязательства. Условия первого: $S_1$ = 400 тыс. руб., $n_1$ = 4 мес.; условия второго: $S_2$ = 420 тыс. руб., $n_2$ = 9 мес. Требуется:

а) найти ставку простого процента, при которой эти обязательства равноценны;

б) определить, какое из этих обязательств выгоднее для получателя денег при ставке простых процентов $i$ = 0,1.

**3.** Получив годовой кредит в 5 млн руб. под ставку 12%, финансовый посредник капитализирует его по той же ставке с периодичностью в 3 месяца. Какую годовую процентную маржу и чистый доход он получит с помощью «коротких денег»?

**4.** Вкладчик внес в Сбербанк под определенный процент 20 тыс. руб. Через год он снял со счета половину процентной прибавки, а основной вклад и оставшуюся прибавку оставил в банке. Еще через год у вкладчика на счету оказалось 26400 руб. Каков процент годовых по вкладу в Сбербанке?

**5.** Найти месячную ставку, эквивалентную простой годовой ставке, равной 10%.

**6.** Господин Иванов занял у господина Петрова 9800 руб. и выдал ему вексель, по которому обязался выплатить через три месяца 10 тыс. руб. Найти годовой процент $r$ и соответственно годовую учетную ставку $d$ оказанной Петровым «финансовой» любезности. Задачу решите для двух вариантов:

а) $r$ и $d$ – ставки простых процентов;

б) $r$ и $d$ – ставки сложных процентов

**7.** Переводной вексель выдан на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17 ноября. Владелец учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 8%. Какую сумму он получил и чему равен дисконт?

**8.** Вексель был учтен за 15 дней до срока погашения по ставке 18% годовых. В результате учета владелец векселя получил 49625 руб. Какова номинальная стоимость векселя при условии, что год принимается равным 360 дням.

**9.** Администрация региона получила кредит в банке на сумму 6,0 млн руб. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 10,5% для 1-го года, для 2-го года предусматривается надбавка к процентной ставке в размере 1,5%, для 3-го года и последующих лет – в размере 0,75%. Определить сумму долга, подлежащую погашению по истечении срока займа.

**10.** В банк было положено 1500 руб. Через 1 год и 3 месяца на счете оказалось 1631,25 руб. Сколько простых процентов в год выплачивает банк?

**11.** Определить, какое помещение денег на срок 6 месяцев выгоднее:

а) под простую ставку процентов в 30% годовых;

б) под сложную ставку в 29% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

Задачу решить двумя способами: 1) сравнивая множители наращения за 6 месяцев; 2) формальным сопоставлением эффективных годовых процентных ставок.

**12.** Клиент внес в банк 2,5 тыс. руб. под 9,5% годовых, через 2 года и 270 дней он изъял вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком:

а) сложных процентов;

б) смешанного метода.

**13.** Банк начисляет сложные проценты на вклад исходя из годовой номинальной процентной ставки 0,12. Найдите эффективную ставку при ежемесячной капитализации процентов.

**14.** Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Определить:

а) размер полученной за долг суммы и величину дисконта;

б) то же при простой учетной ставке;

в) то же при поквартальном учете;

г) найти эффективную учетную ставку для случая в).

**15.** Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: 1 тыс долл. сегодня или 1500 долл. через 6 лет?

**16.** 1 февраля 2005 г. клиент учел вексель на сумму 40 тыс. руб. 1 июня того же года срок векселя истек, и клиент получил за него 38790 руб. Какова учетная ставка банка?

**17.** Банк предлагает 15% годовых. Инвестор, делая вклад, желает иметь на счете в банке через два года 90 тыс. руб. Рассчитать сумму первоначального вклада.

**18.** Инвестор имеет 20 тыс. руб. и хочет, вложив их в банк на депозит, получить через 2 года 36 тыс. руб. Рассчитать значение требуемой для этого процентной ставки.

**19.** Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определить множитель наращения по простой ставке за 2,5 года.

**20.** В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 100 тыс. руб. через 240 дней. Первоначальная сумма долга 90 тыс. руб. Год принимается равным 360 дням. Определить доходность ссудной операции для кредитора в виде простых ставок начисления и учетного процента.

**21.** Предполагается поместить 1 тыс. долл. на трехмесячный депозит. Курс продажи на начало срока депозита – 30,5 руб. за

1 долл., курс покупки доллара в конце операции – 30,93 руб. Годовые доходности рублевого и долларового вкладов равны 22% и соответственно 15%. Что выгоднее: поместить деньги на рублевый или на валютный депозит?

**22.** Что выгоднее: вложить 15 тыс. руб. на год под 12,5% или на 3 месяца под годовую ставку 12%?

**23.** Пользуясь правилом числа 70, спрогнозируйте период удвоения цены при следующих значениях годового темпа инфляции: а) $r = 0{,}08$; б) $r = 3$.

**24.** Ссуда в 800 тыс. руб. выдана сроком на пять лет под простые проценты по ставке 20% годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга. Как изменится величина накопленного долга при снижении ставки процентов в два раза?

**25.** На первоначальный капитал в сумме 500 тыс. руб. начисляются сложные проценты – 8% годовых ($r = 0{,}08$) в течение 4 лет.

1. Определите эквивалентную ставку непрерывного наращения $\delta$ (силу роста).

2. Убедитесь в совпадении финансового результата при начислении сложного процента $r$ и за счет непрерывного наращения $\delta$.

**26.** За 5 лет начисленные по долгу сложные проценты сравнялись с величиной долга. Чему равна принятая по процентам ставка? Задачу решите двумя способами: а) по правилу числа 70; б) пользуясь определением эффективной ставки.

**27.** Пусть ставка налога на проценты равна 10%. Процентная ставка – 30% годовых, срок начисления процентов – 3 года. Первоначальная сумма ссуды – 1 млн руб. Определить размеры налога на проценты при начислении простых и сложных процентов.

**28.** На сумму 1,5 млн руб. в течение трех месяцев начисляются простые проценты из расчета 28% годовых. Ежемесячная инфляция в рассматриваемом периоде характеризуется темпами 2, 5, 2 и 1,8%. Определить наращенную сумму с учетом инфляции.

**29.** Вычислить эффективную годовую процентную ставку по займу, если номинальная ставка равна 12% годовых и проценты начисляются:

а) ежегодно;

б) каждые 6 месяцев;

в) ежемесячно;

г) непрерывно.

**30.** Предположим, что сила роста меняется линейно: а) растет со скоростью 2% за год; б) падает с той же скоростью (–2%).

Начальное значение силы роста составляет 8%, а срок наращения – 5 лет. Найти множитель наращения для случая положительной и соответственно отрицательной динамики.

## Аналитические задачи

**1.** Компания по переработке древесины владеет лесоматериалом «на корню», стоимость которого в году $t$ оценивается по формуле $P(t) = 2(1 + 0{,}3t)$. Годовая процентная ставка в рассматриваемый период времени при начислении сложных процентов равна $i$. Требуется:

а) получить формулу оптимального года $t$ для начала переработки лесоматериалов и их продажи в зависимости от ставки начисления $i$;

б) дать рекомендации по использованию лесного массива при условии, что ставка $i = 0{,}1$.

**2.** Пусть счет с начальной суммой $U$ у.е. открывается под простую годовую ставку $r\%$ в момент времени $t = 0$. Спустя $L$ лет открывается счет с начальной суммой $V$ у.е. ($V > U$) и с той же ставкой. Определить:

а) момент времени $t$, когда накопленные суммы на обоих счетах сравняются;

б) чему равен этот срок, если $U = 100$ у.е., $V = 110$ у.е., ставка $r\% = 20\%$, а запаздывание $L = 1$ году.

**3.** Основываясь на определении эффективной ставки начисления, введите схожее понятие эффективной учетной ставки (эффективной ставки удержания) и получите аналог формулы (1.4) для ее определения.

**4.** Доказать, что при одной и той же ставке $i$ начисление сложных процентов обгоняет простые при длине периода наращения более единичного, и медленнее, если период наращения меньше единицы.

**5.** Доказать, что при одной и той же учетной ставке $d$ удержание сложных процентов перекрывает простые проценты внутри единичного промежутка и отстает от удержания по простым процентам вне этого промежутка. Иначе говоря, при удержании простые проценты при сроках меньше единицы уменьшают сумму медленнее, чем сложные, а при начислении – увеличивают ее быстрее сложных; за пределами этого промежутка картина меняется на обратную.

**6.** Господин Петров имеет годовой валютный вклад под ставку $d\%$ годовых. Если вклад с причитающимися процентами не будет востребован на дату окончания, договор считается пролонгированным еще на один год. Годичная ставка по рублевому депозиту составляет $r\%$, курс доллара на дату начала возможной пролонгации – $K_0$, а прогнозируемый курс на дату ее окончания – $K_1$. Получить условие целесообразности продления договора.

**7.** Господин Петров из предыдущей задачи обеспокоен судьбой своего валютного счета: из-за падения курса доллара хранить деньги стало выгоднее в рублях, однако за перевод валютного вклада в рублевый банк взимает комиссионные (в рублях) в размере $\alpha\%$ переводимой суммы. Исходя из этих данных:

а) получить условие целесообразности перевода (на дату возможной пролонгации) валютного вклада $P$ на годовой рублевый депозит;

б) определить, как бы вы поступили в аналогичной ситуации, притом что:

$$K_0 = 29;\ K_1 = 28{,}5;\ d = 8\%;\ r = 11\%,\ \alpha\% = 0{,}7\%?$$

**8.** Рассмотрим случай непрерывного приведения денег во времени. Предположим, что переменная сила роста изменяется во времени по геометрической прогрессии $\delta_t = \delta_0\alpha^t$; $\alpha = \delta_{t+1}/\delta_t$ – годовой темп роста процентной ставки, $\delta_0$ – ее начальное значение. Получить формулу множителя наращения за срок $n$.

## Ситуационные задачи

**1.** На острове Омега в результате инфляционных процессов цены выросли на 300%. Оппозиция потребовала от правительства возвращения цен на прежний уровень, для чего предложила двухлетнюю программу снижения цен на одно и то же число процентов каждый год. В ходе переговоров правительству удалось смягчить это требование до 40% и достичь соглашения об увеличении срока антиинфляционной программы. Определить:

а) предусмотренный двухлетней программой темп дефляции;

б) срок скорректированной программы.

**2.** Две подруги, Маша и Катя, победили в конкурсе красоты. Маша заняла первое место с призовой выплатой 150 тыс. руб. Катя была второй, и ее выигрыш составил 110 тыс. руб. По легкомыслию, не обращая внимания на 20%-ю банковскую ставку и все время откладывая на потом, Маша получила свой выигрыш на два года позже Кати. Кто больше заработал, Маша или Катя?

**3.** Студент имеет 100 долл. и решает: сберечь их или потратить. Если он положит деньги в банк, то через год получит 112 долл. Инфляция составит 14% в год. Определить:

а) номинальную процентную ставку;

б) реальную процентную ставку;

в) что бы вы посоветовали студенту;

г) как повлияло бы на ваш совет снижение темпа инфляции до 10% при неизменной номинальной ставке процента.

**4.** Экономика некоторого государства находится на спаде: ежегодный темп относительного снижения валового национального продукта составляет 14%. Опираясь на правило числа 70, оценить период полураспада экономики при сохранении отмеченной тенденции.

**5.** В 21-й стране, принадлежащей к Организации экономического сотрудничества и развития, среднегодовой темп прироста валового национального продукта в 1960 – 1968 гг. составлял примерно 5,0%. Исходя из условия сохранения этого темпа:

а) оценить период удвоения валового производства товаров и услуг в развитых странах;

б) во сколько раз больше будет производить общество через 70 лет, когда человек достигнет преклонного возраста, по сравнению с годом его рождения?

**6.** Студент, который держит деньги на банковском счете при 8%-й ставке, решил подписаться на журналы. Годовая подписка стоит 12 долл., двухгодичная — 22 долл. Определить:

а) в какую сумму обошлась ему подписка на второй год;

б) какая подписка выгоднее: двухгодичная или две на год при депозитной ставке 30%?

**7.** Мистер Икс, желая удвоить наличную сумму, открыл депозит с начислением по простой ставке в 10% годовых. Определить:

а) через сколько лет будет получена желаемая сумма?

б) на сколько сократится срок ожидания при замене простого процента на сложный?

**8.** После кризиса банковской системы господин Иванов уже не доверял банкам и хранил свои деньги в валюте. Время шло, банковская система укрепилась, и господин Иванов стал подумывать, а не положить ли ему деньги на депозит. У него была накоплена 1 тыс. долл., но надежная когда-то валюта стала слабеть и отставать от евро, а рубль окреп и стабилизировался.

Иванов задумался, в какой валюте выгоднее хранить деньги. Банк предложил ему следующие варианты вкладов: в рублях – 15%, долларах – 6% и в евро – 5% годовых. Помогите господину Иванову выбрать валюту вклада, если известны следующие условия:

а) рост доллара – 0,5% в месяц;

рост евро – 0,6% в месяц;

текущий курс доллара – 29 руб., евро – 36 руб.;

б) в конце года Иванов собирается:

- сделать крупную покупку в рублях;
- взять отпуск и отдохнуть в Турции;
- поехать в Европу.

Изменится ли ваш совет, когда вы узнаете о его планах?

## Тесты

**1.** Если номинальная процентная ставка составляет 10%, а темп инфляции определен в 4% в год, то реальная процентная ставка составит:

1) 14%;
2) 6%;
3) 2,5%;
4) – 6%;
5) 4%.

**2.** В год «1» уровень цен не изменяется, номинальная ставка процента составляет 6%. В год «2» темп инфляции составил 3%. Если реальная ставка процента в году «2» на том же уровне, что и в году «1», то номинальная ставка процента в году «2» должна:

1) вырасти на 9%;
2) вырасти на 3%;
3) снизиться на 3%;
4) вырасти на 6%;
5) остаться неизменной на уровне 6%.

**3.** Положительное решение о строительстве моста, который должен служить 200 лет и приносить прибыль в размере 10%, будет принято при условии, что процентная ставка составит:

1) не более 2%;
2) не более 20%;
3) 10% или менее;

4) 10% или более;

5) для принятия решения отсутствует информация.

**4.** Фирма желает взять заем на покупку нового оборудования, которое будет стоить 20000 ден. ед. и служить 1 год. Ожидается, что благодаря этому дополнительный годовой доход составит 1500 ден. ед. Фирма осуществит инвестиции в оборудование при условии, что процентная ставка составит:

1) 6%;

2) 8%;

3) 10%;

4)15%;

5) 4%.

**5.** При ставке дисконтирования в 10% коэффициент дисконтирования первого года будет равен:

1) 0,80;

2) 0,83;

3) 0,89;

4) 0,91;

5) все ответы неверны.

**6.** Индивидуальный предприниматель купил оборудование на сумму 250 тыс. руб., рассчитывая продать его в конце 1-го года за 300 тыс. руб. за вычетом налогов. Предполагаемая доходность инвестиций составит:

1) 10%;

2) 15%;

3) 20%;

4) 25%.

**7.** Депозитная ставка равна 7% с начислением по сложному годовому проценту. Определить период времени, по истечении которого процентные деньги сравняются с величиной вклада:

1) 5лет;

2) 10 лет;

3) 12 лет;

4) всегда будут меньше;

5) все ответы неверны.

**8.** Если темп инфляции увеличивается, то при прочих равных условиях в соответствии с эффектом Фишера (правилом компенсации $j = i + r + ir$):

1) номинальная и реальная ставки процента понизятся;

2) номинальная и реальная ставки процента повысятся;

3) номинальная и реальная ставки процента не изменятся;

4) номинальная ставка процента повысится, реальная – не изменится;

5) номинальная ставка процента не изменится, реальная – снизится.

**9.** По условиям одного из двух обязательств должно быть выплачено 500 тыс. руб. через 4 месяца; второго –540 тыс. руб. через 8 месяцев. Применяется простая процентная ставка 18%. Какое из этих условий выгоднее для должника:

1) первое;

2) второе;

3) равноценны;

4) имеющейся информации недостаточно.

**10.** Проценты на проценты начисляются в схеме:

1) сложных процентов;

2) простых процентов;

3) как сложных, так и простых процентов;

4) независимо от схемы проценты начисляются только на основной капитал, но не на проценты.

**11.** Если реальная ставка инвестирования в некотором году была равна 6,0%, а номинальная – 11,3%, то каков был уровень инфляции в этом году?

1) 5,3%;

2) 5%;

3) 105%

4) все ответы неверны.

**12.** На вклад $P$ начисляются сложные проценты по годовой ставке $i$. Величина процентов, начисленных за второй год хранения вклада, составит сумму $\Sigma$, равную:

1) $2Pi + Pi^2$;

2) $Pi + Pi^2$;

3) $P(1 + i)^2 - P$.

**13.** Капитал в 1 млн руб. может быть помещен в сбербанк на 3 месяца с ежемесячным начислением 3% (по ставке сложных процентов) или на срочный вклад на 3 месяца, по которому в конце 3-го месяца начисляется 9%. Определить наиболее предпочтительный способ помещения капитала:

1) второй;

2) первый;

3) никакой разницы, доход одинаковый.

**14.** Господин Сидоров рассматривает три доступных ему способа вложения денег на ближайшее полугодие: в Сбербанк на 6 месяцев с ежемесячным начислением процентов исходя из годовой ставки 12%; б) с трехмесячным начислением под 12,4% годовых; в) срочный валютный депозит (в долл. США) на 6 месяцев при 8,5% в год. Текущий курс составляет 28 руб. и согласно прогнозам поднимется до 28,5 руб. за 1 долл. к концу полугодия. Расположить эти способы в порядке убывания выгодности:

1) а, б, в;
2) в, б, а;
3) б, в, а;
4) б, а, в.

**15.** Цену изделия дважды снижали на 50%, а затем на 300% увеличили. В результате этого цена:

1) увеличилась на 200%;
2) возросла в три раза;
3) вернулась к первоначальному уровню;
4) ответ, не предусмотренный п. 1 (– 3).

**16.** Найти квартальные ставки начисления ($r$) и удержания ($j$) сложных процентов, которые эквивалентны годовой ставке, равной 20%:

1) $r \approx 4{,}7\%, j \approx 4{,}2\%$;
2) $r = 5\%, j \approx 4{,}5\%$;
3) $r \approx 4{,}7\%, j \approx 4{,}5\%$;
4) $r = 5\%, j \approx 4{,}2\%$;
5) все ответы неверны.

**17.** Срок оплаты по долговому обязательству на сумму 5 млн руб. наступает через 5 лет. Годовая учетная ставка равна 15%. Имеется три способа продажи этого обязательства:

а) с годовым удержанием сложных процентов;
б) то же при простой учетной ставке;
в) с дисконтом при полугодовом учете по сложной ставке.

Определить способ, наиболее предпочтительный для продавца, и указать разницу в доходах по сравнению с наихудшим вариантом:

1) способ «б» лучше, разница 1042912 руб.;
2) никакой разницы, доход одинаковый;
3) способ «а» лучше, разница 968527 руб.;
4) способ «в» лучше, разница 1042912 руб.;
5) способ «в» лучше, разница 74385 руб.

**18.** Допустим, что годовые ставки начисления простого и сложного процента одинаковы. Сравнить результаты начисления в зависимости от срочности вклада:

1) сложный процент всегда выгоднее для вкладчика независимо от периода начисления;

2) для долгосрочных депозитов (больше года) сложный процент выгоднее простого;

3) для краткосрочных депозитов (меньше года) простой процент отстает от начисления сложного процента;

4) в пределах года простой процент выгоднее сложного.

**19.** Сравнить динамику удержания сложных и простых процентов при одной и той же годовой учетной ставке:

1) внутри года дисконт по простой учетной ставке больше, чем для удержания сложного процента;

2) при сроках больше года сложные проценты удерживают меньшую сумму, чем простые;

3) дисконтирование по сложной учетной ставке перекрывает простую ставку при любых сроках;

4) для краткосрочного учета (меньше года) дисконт по сложной ставке больше, а за пределами года наоборот.

**20.** Студент, который держит деньги на банковском счете при 8%-ной ставке, решил подписаться на журналы. Годовая подписка стоит 12 долл., а двухгодичная – 22 долл. Определить:

а) в какую сумму обошлась ему подписка на второй год;

б) какая подписка выгоднее: двухгодичная или две на год при депозитной ставке 30%?

1) 10;

2) 11;

3) 10,8;

4) выгоднее двухгодичная подписка.

## Ответы и решения

### Расчетные задачи

**1.** $p_1 = p_0(1 - 0{,}1)(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}25) = 0{,}54p_0 = 54\%p_0$. $100\% - 54\% = 46\%$.

**2.** а) $400(1 + 5i/12) = 420$, $i = 12\%$; б) $400(1 + 0{,}1 \cdot 5/12) < 420$. Второе обязательство выгоднее.

**3.** 0,55%, 27500 руб. **4.** 20%. **5.** 0,83%. **6.** а) $r = 8{,}16\%$, $d = 8\%$; б) $r = 8{,}42\%$, $d = 7{,}76\%$.

**7.** 100 000$(1 - {}^{55}/_{360}) \cdot 0{,}08)$ = 98777,78 руб. – сумма, 100 000 – – 98777,78 = 1222,22 руб. – дисконт.

**8.** 50000 руб.

**9.** $S = 6{,}0 \cdot 1{,}105 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1275^3 = 10{,}643$ млн руб. **10.** 7%.

**11.** 1) 1,15; 1,1503. 2) 32,25%; 32,31%. Второй вариант помещения средств выгоднее.

**12.** а) $2{,}5(1 + 0{,}095)^{2+(270/365)} = 3{,}2057$ тыс. руб.; б) $2{,}5 \cdot (1{,}095)^2 \cdot (1 + \frac{270}{365} \cdot 0{,}095) = 3{,}2082$ тыс. руб.

**13.** 12,682%. **14.** а) 2218527 руб., 2781473; б) 1250000 руб., 3750000 руб.; в) 2328010 руб., 2671990; г) $d_{эф} = 0{,}14177 \approx 14{,}18\%$; $(1 - d_{эф})^5 = (1 - {}^{0{,}15}\!/_{4})^{20}$.

**15.** Второй вариант лучше, так как $1500(1 + 0{,}06)^{-6} = 1057{,}44 > > 1000$.

**16.** $40000(1 - d \cdot 120/365) = 38790$; $d = 9{,}2\%$.

**17.** 68,053 тыс. руб. **18.** 34%. **19.** 1,43%. **20.** 16,(6)%, 15%.

**21.** Рублевый депозит выгоднее: конвертируя наращенную на нем сумму, вкладчик получит 1040,33 долл., что больше, чем 1037,5 долл. на валютном депозите.

**22.** $r_2 = (1{,}03)^4 - 1 = 0{,}1255 = 12{,}55\%$ – второй вариант вложения выгоднее.

**23.** а) 70/8 = 8,75 года; б) чтобы воспользоваться приближенной формулой (1.6), оценим помесячную инфляцию: $\rho = \sqrt[12]{4} - 1 \approx 0{,}12 = = 12\%$. Цены удвоятся через 5 месяцев и 24 дня: 70/12 = 5,8 мес.

**24.** 800 тыс. руб. – проценты, 1600 тыс. руб. – накопленный долг, 1200 тыс. руб. – величина накопленного долга по ставке 10% (уменьшится на одну четверть).

**25.** 1) $\delta = \ln(1 + i) = \ln 1{,}08 = 0{,}076961$; 2) $S^* = 500(1 + 0{,}08)^4 = = 680{,}244$; $S^{**} = 500e^{0{,}076961 \cdot 4} = 500 \cdot 1{,}3605 = 680{,}25$; $S^* = S^{**}$.

**26.** а) $r \approx \frac{70}{5} = 14\%$; б) $r = \sqrt[5]{2} - 1 \approx 0{,}1487 = 14{,}87\%$.

**27.** 90 тыс. руб., 119,7 тыс. руб.

**28.** 1,508 млн руб.

**29.** а) 12%; б) 12,36%; в) 12,68%; г) 12,75%.

**30.** а) $e^{0{,}65} = 1{,}91554$; б) $e^{0{,}15} = 1{,}1618$.

**Аналитические задачи**

**1.** а) $t = \frac{1}{\ln(1+i)} - \frac{10}{3}$; б) лесоматериал следует обрабатывать и продавать через 7 лет. Формула оптимального года выводится из условия максимизации современной стоимости лесоматериалов.

**2.** а) $V(1 + r(T - L)) = U(1 + rT)$, $r = r\%/100$.

Откуда $T = \frac{V}{V - U} \cdot L - \frac{1}{r}$; б) $T = 6$, через 6 лет.

**3.** $d_{ef} = 1 - \left[\frac{S_0}{S_T}\right]^{\frac{1}{T}}$.

**4.** Доказать неравенства $(1 + i)^t > (1 + ti)$ при $t > 1$ и $(1 + i)^t < (1 + ti)$ при $0 < t < 1$.

**5.** Доказать неравенства $(1 - d)^t < (1 - td)$ при $0 < t < 1$ и $(1 - d)^t > (1 - td)$ при $t > 1$.

**6.** $(1 + d)K_1 > K_0(1 + r)$.

**7.** а) $K_0(1 - \alpha)(1 + r) > K_1(1 + d)$; б) $29 \cdot 0{,}993 \cdot 1{,}11 = 31{,}94 > 28{,}5 \cdot 1{,}08 = 30{,}78$ – деньги лучше переложить.

**8.** Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dS}{S} = \delta_0 \alpha^t dt$$

с начальным условием $S(0) = S_0$. Интегрируя, найдем

$$S(t) = S_0 e^{\int_0^n \delta_t dt},$$

где $\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n \delta_0 \alpha^t dt = \frac{\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)$.

Тогда множитель наращения $q = e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)}$.

**Ситуационные задачи**

**1.** а) $4P(1 - i)^2 = P$, $(1 - i) = {}^1/_2$, $i = {}^1/_2 = 50\%$; б) $4P(1 - 0{,}4)^t = P$, $(0{,}6)^t = 0{,}25$, $t = \frac{\lg 0{,}25}{\lg 0{,}6}$, $t = \frac{-0{,}60205999}{-0{,}22184875} \approx 2{,}7$ года.

**2.** (150000/1,44) = 104166, (6) < 110000; Катя по фактической ценности денег с учетом календарной даты их получения заработала больше.

**3.** а) 12%; б) из (1.7) следует, что $i = \frac{j-r}{1+r} \cdot 100\% = -1{,}75\%$; применяя приближенную формулу (1.8), получим $i \approx -2\%$; в) потратить деньги на текущее потребление; г) сберечь деньги.

**4.** 5 лет. **5.** а) 14 лет; б) согласно п. «а» удвоение происходит за 14 лет, следовательно, через 70 лет производство вырастет в 32 раза.

**6.** а) 10,8 долл. б) две годовых;

**7.** а) 10 лет, б) 3 года.

**8.** а) деньги следует хранить в рублях; б) не изменится.

## Тесты

**1.** (2); **2.** (2); **3.** (3); **4.** (1), (5); **5.** (4); **6.** (3); **7.** (2). **8.** (4); **9.** (1). **10.** (1); **11.** (2); **12.** (2); **13.** (2); **14.** (4); **15.** (3); **16.** (3); **17.** (4); **18.** (2), (4); **19.** (4); **20.** (3).

# Раздел 2
# ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

## 2.1. Основные понятия и формулы

В приложениях зачастую приходится иметь дело не с одним платежом, как в предыдущей главе, а с их временной последовательностью, иначе говоря – потоком. Соответственно, вместо приведения платежа, с учетом фактора времени возникает задача о приуроченной к некоторой временной дате стоимостной оценке всего потока. Эти обобщающие (вторичные) числовые характеристики должны быть финансово эквивалентны, в определенном смысле, всему потоку и используются для решения широкого круга практических задач с участием финансового фактора.

Предлагаемые жизнью потоковые конструкции весьма разнообразны и определяются различными сочетаниями вариантов регулярности и случайности по датам платежей, их направлению (приходы–расходы) и размеру. В настоящей главе ограничимся правилами алгебраических действий с детерминированными потоками и теми задачами, которые решаются с их использованием.

В следующих главах этот материал будет дополнен рассмотрением приложений из области кредитов, инвестиций и ценных бумаг.

### 2.1.1. Потоки платежей в схеме сложных процентов

**Обобщающие характеристики финансового потока.** *Наращенная сумма* ($S$) – сумма наращений всех платежей потока на дату его окончания. *Современная величина* ($A$) – сумма современных величин всех платежей потока.

Разумеется, для знакопеременного потока его обобщающие характеристики вычисляются как алгебраические суммы. В общем случае приведенную величину потока можно рассматривать для произвольного момента времени, а не только в начале, как для $A$, или конце потока, как для $S$.

Поток платежей, все члены которого – положительные величины, а интервалы времени между двумя последовательными платежами постоянны, называют финансовой рентой. Ниже приводятся формулы для потока с выплатами в конце периода, так называемые ренты постнумерандо. Если платежи приходятся на начало каждого периода (рента пренумерандо), то обобщающие характеристики нетрудно получить, опираясь на формулы предыдущего случая с учетом временного сдвига.

*Общая постоянная рента* – последовательность $p$ одинаковых выплат на протяжении года в течение всего срока ренты $n$ (число лет) с $m$-разовым ежегодным начислением процентов по одной и той же годовой ставке $i$ (десятичная дробь). Наращенная сумма $S$ и современная величина $A$ общей ренты составят:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1};$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}, \tag{2.1}$$

где $R$ – годовая сумма платежа.

*Простая годовая рента* – выплаты производятся один раз в конце каждого года, проценты начисляются раз в году ($p = m = 1$).

Обобщающие характеристики:

$$S = R \cdot \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i};$$

$$A = R \cdot \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}. \tag{2.2}$$

Множители $s(n, i) = [(1 + i)^n - 1]/i$, $\alpha(n, i) = [1 - (1 + i)^{-n}]/i$ в (2.2) называют коэффициентом наращения и соответственно приведения годовой ренты.

*Вечная рента* ($n = \infty$). Современная величина бессрочной ренты равна:

$$A = \frac{R}{i}. \tag{2.3}$$

**Переменные потоки платежей $\{R_t\}$:** платежи изменяются во времени. Обобщающие характеристики получают, как правило, путем прямого счета.

Частные случаи:

- рента с постоянным абсолютным приростом платежей:

$$R_{t+1} - R_t = a, \text{ т.е. } \{R_t = R_1 + (t-1)a,\ t = 1, 2, ..., n\};$$

$$S = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{na}{i}; \tag{2.4}$$

$$A = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right) \cdot \frac{(1-\gamma^n)}{i} - \frac{na\gamma^n}{i},\ \gamma = (1+i)^{-1}; \tag{2.5}$$

- рента с постоянным темпом роста платежей: $\frac{R_{t+1}}{R_t} = q$, т.е.

$$\{R_t = R_1 \cdot q^{t-1},\ t = 1, 2, ..., n\};$$

$$S = R_1 \cdot \frac{[(1+i)^n - (1+k)^n]}{(i-k)};$$

$$A = R_1 \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{(i-k)}, \tag{2.6}$$

где $k = 1 - q$ — темп прироста

**Непрерывные потоки платежей.** В ряде случаев более адекватное описание финансовых явлений достигается, когда поток платежей рассматривается как непрерывный процесс.

Частные случаи:

• постоянная непрерывная рента с начислением процентов раз в год. Обобщающие характеристики для такой ренты получаются из формул (2.1), в которых $m = 1$, с помощью предельного перехода при $p \to \infty$.

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)};$$
$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (2.7)$$

Аналогичным путем находятся приведенные значения непрерывной ренты при капитализации процентов $m$ раз в году;

• постоянная непрерывная рента с непрерывным начислением процентов.

$$S = \int_0^n \mathrm{Re}^{\delta t}\, dt = \frac{R}{\delta} \cdot (e^{\delta n} - 1);$$
$$A = \frac{R}{\delta} \cdot (1 - e^{-\delta n}). \qquad (2.8)$$

**Объединение и замена рент.** Для подобных изменений в случае равноправных участников должны выполняться требования финансовой эквивалентности конструируемой (новой) последовательности платежей базовым условиям. Они сводятся к так называемому *уравнению эквивалентности*, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнена к сумме платежей искомой последовательности, приведенных к той же дате.

Простейшим примером такой замены является разовый платеж, приходящийся на начало потока и равный его современной величине. Его инвестирование по ставке $i$ полностью обеспечивает все платежи потока, а порожденная им на дату замыкающего платежа сумма приводит в точности к наращенной стоимости всей последовательности платежей:

$$S = A(1 + i)^n. \qquad (2.9)$$

Для сложных процентов способы приведения знакопеременных потоков принципиально не отличаются от единообразных правил действия с потоками однонаправленных платежей.

## 2.1.2. Потоки платежей в схеме простых процентов

В большинстве случаев в финансовых операциях, предусматривающих последовательные платежи, используется сложная процентная ставка. Однако это не единственно возможный способ начисления процентов, иногда начисление осуществляется по простым процентным ставкам.

Согласно их основному свойству в этой схеме проценты за период начисляются лишь на основной (инвестированный) капитал, так что проценты на проценты предыдущих (прошлых) периодов не начисляются. Это свойство требует разделения накопительного счета на две компоненты: *счет капитала*, который определяется только вносимыми суммами, и *процентный счет*, учитывающий начисленные на инвестированнный капитал проценты. При этом сами проценты начисляются и накапливаются последовательно по периодам от одного вложения до следующего. Из-за этого, с точки зрения финансовой алгебры, простой процент оказывается сложнее, чем сложный.

Для простого процента также рассматриваются стандартные обобщающие характеристики, основанные на суммировании будущих или текущих стоимостей отдельных платежей потока:

$$\{R_t, t = t_1, t_2, ..., t_n\}.$$

**Стандартные обобщающие характеристики:**

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k(1 + i(t - t_k)), \ t \geq t_k;$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{1 + i(t_k - t_0)}. \qquad (2.10)$$

Если платежи $R$ производятся $p$ раз в году на протяжении $n$ лет и количество начислений процентов в году совпадает с количеством платежей, то формулы наращенной суммы $S$ и современной величины $A$ примут вид:

$$S = RN\left(1 + \frac{(N-1)i}{2p}\right),$$
$$A = R\sum_{t=1}^{N}(1 + it/p)^{-1}, \tag{2.11}$$

где $N = np$ – общее число платежей.

В частном случае для годовой ренты имеем:

$$S = nR1 + \frac{(n-1)i}{2};$$

$$A = R\sum_{t=1}^{n}(1 + ti)^{-1}. \tag{2.12}$$

В отличие от сложного процента для простой ставки равенство (2.9) не выполняется, т.е. наращенная сумма $S$ в этом случае не получается как результат начисления простого процента на начальный вклад, равный стандартной текущей стоимости $A$. В общем случае понятие финансовой эквивалентности в схеме простых процентов определяется особенностями их начисления с учетом поступлений и изъятий.

**Основные модели и правила.** *Модель мультисчета* – ей соответствует финансовый поток, порождаемый открытием $n$ накопительных счетов.

*Коммерческое правило:* все вложения и изъятия относят только к основному счету, а процентный счет при этом не изменяется.

*Актуарное правило:* изъятие всегда начинается с процентного счета.

С изъятием связана еще одна сложность. Что делать, если снимаемая сумма больше основной? С формальной точки зрения можно выполнить все расчеты, если допустить отрицательные значения для основного капитала. Содержательно это означает, что вкладчик становится должником банка. На практике такая возможность реализуется в так называемом конкоррентном счете. Такой счет позволяет его владельцу иметь временный отрицательный баланс (овердрафт). Однако процентная ставка, которая в этом случае становится для банка ставкой по кредиту, обычно больше, чем ставка по положительному балансу, т. е. депозитной ставки.

В общем случае определение текущей стоимости зависит от применяемой модели: современным эквивалентом всех будущих платежей потока является такая сумма А, что ее инвестирование сегодня в соответствии с выбранным правилом (актуарное, коммерческое, мультисчет) полностью обеспечивает (воспроизводит) все платежи потока.

Так, для модели мультисчета текущая стоимость потока совпадает со стандартной текущей стоимостью $A$ (2.10). Этот факт – естественное следствие полной независимости, которой обладают отдельные платежи потока в мультисчетной модели.

Необходимость в определении современной величины ренты с простыми процентами возникает, например, во внешнеторговых операциях, когда оплата покупки производится с помощью портфеля векселей, сроки которых равномерно распределены во времени. В этой операции, отвечающей модели мультисчета, современная величина равна текущей стоимости этого портфеля (2.10) и характеризует сумму, которую получит экспортер при одновременном учете всех векселей.

## 2.2. Типовые примеры

**1.** *Наращенная сумма (простой процент).*

Клиент сделал вклад на текущий счет в банке в сумме 100 тыс. руб. под простую ставку 14% годовых. Затем через 3, 6 и 9 месяцев он вложил еще по 10 тыс. руб. В конце года клиент закрыл счет. Какую сумму он получил при закрытии счета?

Решить задачу, используя следующие правила.

1. Разделение счета на основной и процентный.

2. Мультисчет.

Решение

1. В течение первого квартала сумма на счете капитала составляла величину $P = 100$. Проценты за первый квартал (длительность квартала в долях года равна 0,25):

$$i\Delta t \cdot P = 0{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 100 = 3{,}5.$$

В течение второго квартала сумма на основном счете $P = 100 + 10 = 110$, проценты с которой равны:

$$i\Delta t \cdot P = 0{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 110 = 3{,}85;$$

сумма на счете в течение третьего квартала – 120, проценты за третий квартал – 4,2; сумма на основном счете в течение четвертого квартала — 130, проценты равны 4,55. Итоговая сумма на процентном счете (проценты за год) определяется сложением поквартальных процентов и составляет величину $I = 3{,}5 + 3{,}85 + 4{,}2 + 4{,}55 = 16{,}1$. Сумма, которую получит клиент при закрытии счета, равна 130 + 16,1 = 146,1 тыс. руб.

2. Величина вклада на накопительном счете на дату закрытия равна наращенной сумме потока всех вложений:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4;$$

$$S = 100(1 + 0{,}14) + 10(1 + 0{,}75 \cdot 0{,}14) + 10(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}14) + \\ + 10(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}14) = 146{,}1 \text{ тыс. руб.}$$

**2.** *Коммерческое и актуарное правила.*

В условиях предыдущей задачи заменим вложение 10 тыс. руб. в конце 6-го месяца на изъятие в 20 тыс. руб. и найдем состояние счета на конец каждого квартала в зависимости от используемого банком правила (коммерческого или актуарного);

Решение

Согласно коммерческому правилу все платежи учитываются на счете капитала, и его последовательным состояниям соответствует вектор (110, 90, 100, 100).

Найдем последовательность сумм на процентном счете:

$$(3{,}5;\ 3{,}5 + 3{,}85 = 7{,}35;\ 7{,}35 + 0{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 90 = \\ = 10{,}5;\ 10{,}5 + 0{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 100 = 14).$$

Сопоставляя эти последовательности, получим полную сумму счета на конец каждого квартала:

$$S_1 = 113{,}5;\ S_2 = 97{,}35;\ S_3 = 110{,}5;\ S_4 = 114.$$

На практике банки выплачивают проценты по вкладу, поэтому в случае изъятия сумм сначала уменьшается процентный счет, а затем основной (актуарное правило). Согласно этой процедуре выплата в 20 тыс. руб. производится за счет накопленных за полугодие процентов (7,35) и снятия недостающей суммы (20 – 7,35 = = 12,65) с основного счета. В результате придем к следующим временным характеристикам состояний основного, процентного и полного счетов ($P_i$, $I_i$, $S_i$) (табл. 2.1).

Таблица 2.1

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P_1 = 110$ | $P_2 = 110 - (20 - - 7{,}35) = 97{,}35$ | $P_3 = 107{,}35$ | $P_4 = 107{,}35$ |
| $I_1 = 3{,}5$ | $I_2 = 3{,}5 + 3{,}85 - - 7{,}35 = 0$ | $I_3 = 0{,}14 \cdot 0{,}25 \times \times 97{,}35 = 3{,}407$ | $I_4 = 3{,}407 + 0{,}035 \times \times 107{,}35 \approx 7{,}16$ |
| $S_1 = 113{,}5$ | $S_2 = 97{,}35$ | $S_3 = 107{,}35 + + 3{,}40725 = 110{,}757$ | $S_4 = 107{,}35 + 7{,}16 = = 114{,}51$ |

3. *Наращенная сумма (сложный процент).*

Для создания резервного фонда ежегодно выделяется по 400 тыс. руб. На аккумулируемые средства начисляются сложные проценты по ставке 8%. Необходимо определить общую сумму фонда через 5 лет для следующих вариантов поступления средств и начисления процентов:

а) поступление в конце квартала, начисление процентов поквартальное;

б) поступление в конце квартала, начисление процентов по полугодиям;

в) поступления в конце года при непрерывном начислении процентов;

г) поступления на протяжении всего срока происходят непрерывно, проценты начисляются непрерывно.

Решение

а) Воспользуемся формулой (2.2) для простой годовой ренты, заменив год кварталом, а годовую ставку – квартальной: $i = 2\%$, $n = 20$. Значение коэффициента наращения $s(20,2) = 24{,}297$, откуда $S = 400 \cdot \dfrac{24{,}297}{4} = 2429{,}7$ тыс. руб.;

б) в этом варианте $p = 4$, $m = 2$, $n = 5$, $\dfrac{i}{m} = 0{,}04$. По формуле (2.1) находим:

$$S = \frac{400}{4} \cdot \frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{(1+0{,}04)^{2/4} - 1} = 2425{,}45 \text{ тыс. руб.};$$

в) эквивалентный заданной годовой ставке $i$ непрерывный процент:

$$\delta = \ln(1 + 0{,}08) = 0{,}07696\ (e^{0{,}07696}=1{,}08).$$

Наращение с силой роста δ даст тот же результат, что и начисление под годовую ставку 8%. Воспользовавшись формулой (2.2), найдем итоговую величину фонда:

$$S = 400 \cdot s(5{,}8) = 400 \cdot 5{,}8666 = 2346{,}64 \text{ тыс. руб.};$$

г) для случая (2.8) постоянной непрерывной ренты и непрерывных процентов будет накопленная сумма

$$S = \frac{400 \cdot (1{,}08^5 - 1)}{0{,}07696} = 2439{,}33 \text{ тыс.руб.}$$

**4.** *Современная стоимость ренты.*

Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы иметь возможность в течение следующих 8 лет ежегодно снимать со счета 25 тыс. руб., исчерпав счет полностью к концу срока? Решить задачу для следующих вариантов начисления процентов:

а) в конце года по ставке $i = 5\%$;

б) в конце квартала при той же годовой ставке;

в) непрерывно с силой роста $\delta = 5\%$.

Решение

Во всех случаях требуется найти современную стоимость годовой ренты:

а) применим формулу (2.2) : $A = R \cdot \alpha\ (8{,}5)$. Значение $\alpha\ (8{,}5) = 6{,}46321$. Откуда:

$A = 25000 \cdot 6{,}46321 = 161580{,}25$ руб.;

б) по условию проценты начисляются 4 раза в год. Полагая в формуле общей ренты $p = 1$, $m = 4$, $n = 8$, $i = 0{,}05$, найдем интересующее нас значение современной величины:

$$A = 25000 \cdot \frac{1-(1+0{,}05/4)^{-4 \cdot 8}}{(1+0{,}05/4)^4 - 1} = 25000 \cdot \frac{0{,}328016}{0{,}050945} = 160965{,}75 \text{ руб.};$$

в) в этом случае перейдем к эффективной ставке процента $i = e^{\delta} - 1$ и применим обобщающую характеристику (2.2) простой годовой ренты. В результате получим формулу современной стоимости

$$A = R \cdot \frac{(1 - e^{-\delta n})}{(e^{\delta} - 1)},$$

для расчета требуемой суммы:

$$A = 25000 \cdot \frac{1-e^{-0,05 \cdot 8}}{e^{0,05}-1} = 160753,64.$$

**5.** *Отыскание размера платежа.*

Необходимо найти размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, в каждой из которых предусматривается начисление на взносы годовых процентов по ставке 8%.

1. Создать к концу пятилетия фонд, равный 1 млн руб.

2. Погасить к концу пятилетия текущую задолженность, равную 1 млн руб.

Решение

а) приравняем размер создаваемого фонда наращенной сумме (2.2) простой годовой ренты. Из полученного уравнения находим:

$$R = \frac{S}{s(5,8)} = \frac{1000000}{5,86660096} = 170456,4 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежегодные взносы в размере 170456,4 руб. достаточны при начислении на них процентов по указанной ставке для накопления 1 млн руб.;

б) для определения ежегодной суммы погашения за 5 лет текущего долга в 1 млн руб. приравняем его к современной величине ренты (2.2), члены которой погашают долг. Из полученного уравнения находим:

$$R = \frac{A}{a(5,8)} = \frac{1000000}{3,99271} = 250456,46 \text{ руб.}$$

**6.** *Отыскание срока ренты.*

Иванов должен выплатить Петрову 40 тыс. руб. Он предлагает заменить эту разовую выплату ежегодными платежами в начале каждого года по 10 тыс. руб. каждый. Сколько лет должен будет ждать Петров полного погашения долга со стороны Иванова, если на долг начисляются проценты по ставке 8% годовых?

Решение

Задача сводится к определению срока простой годовой ренты. Полагая в (2.2) приведенную стоимость $A$ равной разности между величиной долга $D$ и платежом $R$, придем к следующей формуле:

$$n = \frac{-\ln(1-(D-R)\cdot i/R)}{\ln(1+i)}.$$

Подставляя в нее исходные данные, получим:

$$n = \frac{-\ln(1-3000\cdot 0{,}08/10000)}{\ln(1+0{,}08)} \approx 3{,}57 \text{ года.}$$

Пусть продолжительность заменяющей ренты равна 3 годам. Тогда ее современная величина

$$A_3 = 10000 \cdot \alpha(3{,}8\%) = 10000 \cdot 2{,}5771 \approx 25771.$$

В то же время современная величина заменяемой ренты $A =$ $= 30$ тыс. Разность, таким образом, составляет 4229 руб. Эту сумму следует уплатить в начале первого периода заменяемой ренты или с соответствующим наращением в любой другой момент. Если заменяемую ренту продлить на один год, то для окончательного погашения долга Иванов должен будет в конце 4-го года выплатить Петрову сумму $R^* = 4229 \cdot 1{,}08^4 = 4229 \cdot 1{,}3605 \approx 5753{,}55$ руб.

**7.** *Отыскание ставки процентов.*

Банк предлагает клиенту выплату ренты на следующих условиях: клиент вносит 10 тыс. руб., а банк в течение 5 лет выплачивает ему в конце каждого года по 3 тыс. руб. Определить доходность подобной операции.

Решение

Современная стоимость $A$ получаемой клиентом ренты, вычисленная по искомой процентной ставке $i$, совпадает с величиной его начального капитала. При известных значениях $A = 10$, $R = 3$, $n = 5$ найдем $a(5,i) = \frac{10}{3} = 3,(3)$. В соответствии с таблицей коэффициентов приведения годовой ренты $a(5;\ 15{,}5) = 3{,}3128 < a(5,i) =$ $= 3,(3) < a(5;\ 15) = 3{,}3522$. Поэтому за приближенную оценку доходности допустимо принять среднюю табличных ставок: $i \approx$ $\approx \frac{15+15{,}5}{2} = 15{,}25\%.$

**8.** *Замена ренты разовым платежом (правило мультисчета).*

Два платежа $S_1 = 100$ тыс. руб. и $S_2 = 50$ тыс. руб. со сроками 150 и 180 дней, отсчитываемыми от одной базы, заменяются одним со сроком 200 дней. Стороны согласились на замену при использовании простой ставки, равной 6% годовых. Найти величину консолидированного платежа $S_\Sigma$.

Решение

Для замены ренты $S_1$, $S_2$ платежом $S_\Sigma$ можно воспользоваться моделью мультисчета: финансово-эквивалентный заменяющий платеж должен равняться сумме наращений выплат $S_1$, $S_2$ за период их отсрочки:

$$S_\Sigma = 100(1 + 0{,}06 \cdot 50/365) + 50(1 + 0{,}06 \cdot 20/365) = 150986 \text{ руб.}$$

**9.** *Отыскание срока платежа, заменяющего ренту.*

Рассматриваются два варианта перечисления суммы 1,2 млн руб.: платежами в конце года с приростом в 5 тыс. руб. на протяжении 16 лет или разово. Найти срок $\tau$ однократного платежа при условии, что ставка сложного процента равна 8%.

Решение

Применяя (2.4), запишем условие эквивалентности в виде равенства наращенных сумм по каждому варианту:

$$(R_1 + \frac{a}{i}) \cdot s(n;i) - \frac{na}{i} = R(1+i)^{n-\tau}.$$

Согласно условиям задачи $R$ = 12000000, $a$ = 5000, $n$ = 16, $i$ = 0,08. Для определения недостающего параметра $R_1$ (первого платежа) воспользуемся формулой суммы $n$ членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

или, в обозначениях задачи:

$$1200000 = \frac{2R_1 + 5000 \cdot 15}{2} \cdot 16.$$

Решая, получим $R_1$ = 37500. Заменим параметры в алгебраической записи условия эквивалентности их численными значениями. В результате придем к следующему уравнению относительно $\tau$:

$$(37500 + \frac{5000}{0{,}08}) \cdot s(16;8) - \frac{16 \cdot 5000}{0{,}08} = 1200000 \cdot 1{,}08^{16-\tau}.$$

Откуда следует, что $1{,}08^{\tau} = 2{,}02277$ и $\tau = \dfrac{\ln 2{,}02277}{\ln 1{,}08} \approx 9{,}15$ года.

**10.** *Объединение рент.*

Найти годовую ренту-сумму сроком в 10 лет для двух годовых рент: одна – длительностью 5 лет с годовым платежом 1000, другая – 8 и 800. Годовая ставка – 8%.

Решение

Для отыскания современной величины ренты-суммы определим числовые значения одноименной характеристики для рент-слагаемых:

$$A_1 = 1000 \cdot a(5;\, 8) = 1000 \cdot 3{,}993 = 3993;$$
$$A_2 = 800 \cdot a(8;8) = 800 \cdot 5{,}747 = 4598.$$

Значит, у ренты-суммы современная величина

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 = 8591.$$

Согласно формуле (2)

$$A_\Sigma = R \cdot a(10;\, 8).$$

Следовательно, годовой платеж ренты-суммы:

$$R_\Sigma = A_\Sigma / \, a(10;8),$$

или, в числах:

$$\mathrm{R_У} = 8591/6{,}710 = 1280{,}328.$$

**11.** *Замена ренты (сложный процент).*

Заменить годовую десятилетнюю ренту с годовым платежом 1000 евро на ренту с полугодовым платежом по 600 евро. Годовая ставка – 10%, проценты начисляются в конце периодов ренты.

Решение

Согласно требованию эквивалентности современные величины рассматриваемых финансовых потоков одинаковы, т. е.:

$$A_2 = A_1 = 1000 \cdot a(10;\, 10) = 1000 \cdot 6{,}1446 = 6144{,}6.$$

Для заменяющей ренты начисление процентов и платежи производятся два раза в год, поэтому для нее можно использовать те же формулы (2.2), что и для простой годовой ренты, считая единичным периодом времени полугодие со ставкой начисления 5%. Отсюда получим уравнение для длительности $n$ этого потока:

$$A_2 = 600 \cdot a(n;\ 5),$$

т. е.

$$a(n;5) = \frac{6144{,}6}{600} = 10{,}241.$$

Это значение заключено между двумя табличными: $a(14;5) =$ $= 9{,}899$ и $a(15;5) = 10{,}380$. Поэтому за приближенную оценку можно принять величину $n = \frac{14+15}{2} = 14{,}5$ периода, или 7,25 года.

## 2.3. Задачи для самостоятельного решения

### Расчетные задачи

**1.** Найти современную стоимость потока с платежами 40, 50, 45, 70, которые выплачиваются в конце каждого полугодия. Процентная ставка – 12% за полугодие.

**2.** Сдан участок в аренду на 10 лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо (выплаты в конце периода) на следующих условиях: первые 6 лет по 10 млн руб., в оставшиеся 4 года по 11 млн руб. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 15%.

**3.** Ежегодно в начале года в банк делается очередной взнос в размере 10 млн руб.; банк платит 20% годовых. Какая сумма будет на счете по истечении 3 лет?

**4.** Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их при использовании простой ставки одним платежом в размере 50 млн руб. Процентная ставка – 10%. Определить:

а) срок консолидированного платежа;

б) как изменится этот срок, если размер объединяющего платежа задан в сумме 45 млн. руб.?

**5.** Ожидается, что прирост доходов составит 5% в год. Какова современная стоимость и наращенная сумма доходов за 3 года, если прогнозируемая сумма 1-го года — 100, а процентная ставка — 7%? Решить задачу для следующих вариантов описания потока доходов:

а) рента постнумерандо;

б) доходы рассредоточены в пределах года. Для уменьшения погрешности модели «а» доходы за год отнести к середине каждого периода.

**6.** Предполагается, что платежи каждый год будут уменьшаться на 50 тыс. руб. Первая выплата равна 500 тыс. руб. Платежи и начисления процентов производятся один раз в конце года на протяжении 8 лет, ставка — 6% в год. Необходимо найти современную величину и наращенную сумму данной ренты.

**7.** Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1 млн руб. в год, продолжительность разработки — 10 лет. Предполагается, что доходы поступают непрерывно и равномерно, проценты начисляются из расчета 8% годовых. Оцените наращенную сумму поступлений за весь период.

**8.** Доходы в размере 100 тыс. руб. в год поступают непрерывно и равномерно в течение 3 лет. Ожидается, что инфляция в будущем составит 5% в год и величина доходов будет определяться с поправкой на инфляцию. Какова современная стоимость корректируемого на инфляцию потока поступлений, если годовая ставка составляет 7%? Решить задачу для двух вариантов описания динамического ряда платежей:

а) дискретная рента;

б) непрерывный поток платежей.

**9.** Страховая компания принимает по полугодиям по 250 тыс. руб. в течение 3 лет. Чему равна сумма, полученная страховой компанией по истечении срока договора, если обслуживающий компанию банк начисляет проценты из расчета 15% годовых:

а) по полугодиям;

б) ежеквартально?

**10.** Владелец малого предприятия предусматривает создание в течение 3 лет фонда развития в размере 150 тыс. руб. Он рассматривает две возможности создания этого фонда с помощью банковского депозита с начислением по сложной ставке в 20% годовых:

а) ежегодными, равными платежами;

б) разовым вложением на 3 года.

Найти размеры помещаемых в банк сумм по каждому варианту.

**11.** Вкладчик открывает накопительный счет 1000 долл. под простую ставку 10%. Какова будет сумма вклада через 2 года, если вкладчик через год:

а) вносит дополнительно 1000 долл.;

б) снимает со счета 200 долл.?

**12.** Для потока наличности (cash flaw – CF) {(1;200),(2; – 500);(3,600)}найти «коммерческое» значение текущей стоимости, если ставка простого процента составляет 20%.

**13.** Для CF ={(1;200),(2;–500);(3,600)} найти стандартные обобщенные характеристики (10): накопленную к моменту $t = 4$ и текущую в момент $t = 0$ стоимости, если ставка простого процента – 20%. Как соотносится стандартная текущая стоимость с текущей стоимостью в модели мультисчета?

**14.** Вкладчик открывает счет с начальным взносом 1000 у.е. и простой процентной ставкой 20% годовых. Согласно договору допускаются добавление и снятие денежных сумм и отрицательное сальдо счета. Операции вкладчика со счетом (довложения и изъятия) образуют следующий поток платежей (в годовой шкале):

$$CF = \{(1;\ 200),\ (2;\ -1500),\ (3;\ 900),\ (4;\ -200),\ (5,\ 100)\}.$$

Считая, что при отрицательном значении основного счета ставка по кредиту совпадает со ставкой положительного баланса, т. е. равна 20%, найти состояние счета для каждого из 5 лет при использовании банком

а) коммерческого правила;

б) актуарного правила.

**15.** Инвестор ежегодно вносит в банк на пополняемый счет 30 тыс. руб. Банк платит 10% годовых по ставке сложного процента. Какова будет сумма вклада через 5 лет, если инвестор вносит очередной вклад:

а) в конце года;

б) в начале года;

в) в середине года?

**16.** Инвестор желает накопить с помощью ежегодных платежей за 5 лет сумму в 200 тыс. руб. Банк платит 10% годовых по ставке сложного процента. Какой взнос должен делать инвестор:

а) в конце года;

б) в начале года?

**17.** Требуется выкупить вечную ренту с платежами 5 тыс. руб. в конце каждого полугодия. Получатель ренты начисляет проценты раз в году по ставке 25%. Чему равна сумма выкупа (стоимость ренты)?

**18.** Предполагается, что станок будет служить 3 года, принося ежегодный доход в 2000 долл. Его остаточная стоимость к концу 3-го года составит 6000 долл. В качестве альтернативы потенциальный покупатель станка рассматривает вложение денег на депозит под ставку 8% годовых. Считая, что в конце срока эксплуатации станок будет продан по его остаточной стоимости, определите верхний предел цены для покупателя станка.

**19.** Сравниваются два варианта строительства некоторого объекта. Первый требует разовых вложений в сумме 6 млн руб. и капитального ремонта стоимостью 0,8 млн руб. каждые 5 лет. Для второго затраты на создание равны 7 млн руб., на капитальный ремонт – 0,4 млн руб. каждые 10 лет. Расчет производится на 50 лет. Какой вариант окажется предпочтительнее при условии, что ставка процента на горизонте рассмотрения:

а) не превысит 10%;

б) не опустится ниже 15%?

**20.** Платежи, поступающие в конце каждого квартала на протяжении 2 лет, образуют регулярный по времени поток, первый член которого равен 500 тыс. руб.; последующие платежи увеличиваются каждый раз на 25 тыс. руб. Начисление процентов производится раз в год по ставке 6%. Найти наращенную и современную стоимость ренты.

**21.** За какой срок $n$ наращенная сумма $S$ вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взноса $R$, если платежи осуществляются непрерывно и равномерно? На взносы начисляются непрерывные проценты, сила роста равна 8%.

**22.** Годовая рента (постнумерандо) сроком 8 лет, член которой $R = 2$ млн руб., откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка, принятая для пролонгирования, – 20% годовых. Определить:

а) размер платежа у сдвинутой ренты;

б) изменится ли ответ, если платежи будут производиться в начале года;

в) изменится ли ответ для произвольных, но одинаковых сроков;

г) размер платежа заменяющей ренты, если ее срок увеличить до 12 лет.

**23.** Рента постнумерандо с условиями 2 млн руб., $n = 5$ лет, $i = 8\%$ откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Определить:

а) новый срок, при котором результат будет сбалансирован, т.е. добиться эквивалентности выплачиваемых сумм;

б) изменится ли ответ, если изменится размер платежа постоянной ренты;

в) изменится ли ответ, если платежи будут производиться в начале года;

г) как учесть разницу, образующуюся в связи с тем, что ответ получился дробным, а рента выплачивается за целое число лет?

**24.** Найти текущую стоимость аннуитета по 60 долл. в год в течение 20 лет с первой выплатой в конце 10-го года. Годовая ставка составляет 8%.

**25.** Сумма инвестиций, осуществленных за счет привлеченных средств, равна 10 млн руб. Предполагается, что отдача от них составит 1 млн руб. ежегодно (получаемых в конце года). Определить:

а) за какой срок $T$ окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по ставке 6% годовых;

б) как следует изменить финансовый поток, чтобы в случае дробного ответа скорректировать срок окупаемости на наименьшее целое, не превосходящее $T$?

## Аналитические задачи

**1.** Пусть $A$ – современная величина немедленной (момент оценки современной величины совпадает с началом ренты) финансовой ренты пренумерандо, вычисленная при условии, что ставка процента равна $i$, а период его начисления совпадает с периодом выплат. Требуется:

а) найти современную величину $A_t$ сдвинутой на $t$ периодов ренты;

б) определить, как соотносятся современные величины $A_1$ и $A$ рент с выплатами в конце и в начале периода;

в) записать формулу современной величины для простой годовой ренты пренумерандо.

**2.** Финансовая рента состоит из $m$ равных по величине платежей $R$, которые следуют с периодичностью в $r$ лет ($r > 1$). Сложные проценты по ставке $i$ начисляются раз в году. Первая выплата производится в конце года $r$. Определить:

а) современную величину и наращенную сумму ренты;

б) как изменятся эти характеристики при условии, что платежи приурочены к началу каждого периода?

**3.** Бессрочный аннуитет состоит из равных по величине платежей $R$, которые следуют с периодичностью в $r$ лет. Сложные проценты по ставке $i$ начисляются раз в году. Первая выплата производится в начале первого года. Найти текущую стоимость (современную величину) аннуитета.

**4.** Постоянная рента с платежами в конце периода имеет следующие характеристики: $n$ – срочность (годы), $p$ – число выплат в году, $R$ – размер платежа; в конце периодов ренты начисляются простые проценты исходя из годовой номинальной ставки $i$. Вывести формулу для определения наращенной суммы ренты на конец ее срока.

**5.** Годовая немедленная рента с параметрами $R_1$, $n$, $i$ заменяется на отсроченную на $t$ лет годовую ренту той же продолжительности и при неизменной процентной ставке. Определить размер платежа $R_2$ новой ренты при условии, что начисление процентов производится

а) один раз в год;

б) $m$ раз в год.

**6.** Годовая рента постнумерандо длительности $n_1$ откладывается на $t$ лет с теми же размером платежа $R$ и ставкой $i$. Определить:

а) число лет $n_2$ новой ренты;

б) величину недоплаты $\Delta$ при дробном числе лет;

в) возможный способ компенсации недоплаты.

**7.** Платежи в размере $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ уплачиваются в пределах одного года через $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ дней после некоторой даты. Доказать, что срок заменяющего платежа $S_0 = \Sigma S_j$ не зависит от процентной ставки и равен средней арифметической взвешенной сроков объединяемых платежей. В качестве весов берутся суммы платежей.

**8.** На счет в банке положена сумма $P$ под годовую ставку сложного процента $r$. В конце каждого года производятся довложения в размере $g$. Чему равна полная сумма счета через $T$ лет?

## Ситуационные задачи

**1.** Какую сумму должен отец вложить сегодня на накопительный вклад при ставке 8% годовых, чтобы обеспечить сыну ежегодные выплаты в размере 1000 у.е. в течение 4 лет обучения в колледже? Задачу решить для двух вариантов процентной ставки:

а) простой;

б) сложной.

**2.** Виктор Кузнецов рассматривает два варианта вложения денег. Первый: вносить на счет в банке 500 долл. каждые полгода под 7% годовых, начисляемых раз в полгода. Второй: вносить на счет в банке 1000 долл. под 7,5% годовых, выплачиваемых раз в год. Первый вклад по первому варианту может быть сделан через 6 месяцев, по второму – через год. Определить:

а) какой план следует избрать Виктору, если его заботит только стоимость вложений через 10 лет;

б) изменили бы вы свой совет при изменении ставки второго варианта до 7%?

**3.** Вы прочитали рекламное объявление: «Платите нам 40 тыс. руб. в год в течение 10 лет, а потом мы будем платить вам по 40 тыс. руб. в год бесконечно». Если это стоящая сделка, то какова процентная ставка?

**4.** Предположим, что две ваши бабушки оставили вам завещания на получение определенной суммы денег. По первому завещанию вы получаете 50 тыс. руб. сейчас и еще 50 тыс. руб. через год. По второму завещанию – 10 тыс. руб. сейчас, 50 тыс. – через год, и еще 50 тыс. в конце 2-го года. Вы можете выбрать только одно завещание. Какой вариант вы предпочтете, если рыночная ставка процента равна:

а) 5%;

б) 15%?

**5.** В ходе судебного заседания выяснилось, что г-н *N* недоплачивал налогов 100 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция собирается взыскать налоги, недоплаченные за последние 2 года, вместе с процентами (5% ежемесячно). Какую сумму должен заплатить г-н *N*?

**6.** Чтобы обеспечить себе дополнительный пенсионный доход, 50-летний Петров хочет воспользоваться услугами накопительной пенсионной системы. Какую сумму денег он должен внести на индивидуальный лицевой счет пенсионного фонда, чтобы после выхода на пенсию иметь в течение всей оставшейся жизни прибавку за счет накопительной части пенсии суммой 24 тыс. руб. ежегодно. Ставка начисления – 12% годовых.

**7.** За хорошую работу начальник предложил своей секретарше каждый год увеличивать ее зарплату на 1000 долл. «С сегодняшнего дня в течение ближайшего года, – сказал он ей, – вы будете получать зарплату из расчета 6000 долл. в год; в следующем году ваша зарплата составит 7000 долл.; в последующем – 8000 и т. д.»

Однако секретарша предложила свой вариант: начиная с этого дня, выплачивать ей из расчета 6000 долл. в год. При этом в конце шестого месяца ее годовая зарплата должна увеличиться на 250 долл. и продолжать возрастать на 250 долл. через каждые шесть месяцев. Начальник согласился, однако один из сотрудников решил подсчитать, мудро ли поступил его шеф, приняв предложение своей служащей. А как считаете вы?

**8.** Вам досталось по наследству 10 тыс. долл. и вы хотите иметь стабильный доход в течение 10 лет. Финансовая компания «Светлое будущее» продает такие аннуитеты из расчета 5% годовых. Какова будет сумма вашего ежегодного дохода, если вы воспользуетесь этой услугой?

**9.** Фермеру предлагают продать находящийся в его владении участок земли, на котором он выращивает в среднем 600 т картофеля в год. Цена одного килограмма картофеля из года в год одна и та же – 0,3 долл. Банковский процент устойчиво держится на уровне 15% годовых. Ниже какой цены фермеру не имеет смысла продавать землю, если затраты на выращивание, сбор и реализацию картофеля оцениваются в 60 тыс. долл. в год?

**10.** Маша следует тенденциям моды, поэтому покупает себе каждый сезон новую сумку. Ее мама любит классику и предпочитает дорогие кожаные сумки, которые носит в среднем в течение 4 лет. На новый год папа дал жене и дочери на обновки по 200 долл. Определить:

а) на сколько сезонов хватит Маше этих денег, если она будет каждый год приобретать по сумке стоимостью 50 долл., а остаток хранить на банковском счете с годовой процентной ставкой 12,6%;

б) по какой максимальной цене может покупать сумки Маша, чтобы они с мамой «износили» свои сумки в одно и то же время?

**11.** Господин Иванов проработал в фирме «Петров и С°» 10 лет. При выходе на пенсию руководство фирмы предложило ему вознаграждение в размере 15000 долл., на что господин Иванов высказал пожелание заменить ему это разовое поощрение ежемесячными выплатами по 150 долл. в течение 10 лет. Какой вариант выплат выгоднее для господина Иванова, а какой – для фирмы при следующих возможностях начисления процентов на рентные платежи: для Иванова – пенсионный вклад с начислением процентов раз в году по ставке 6%, для фирмы – ежеквартально под ставку 10% годовых?

**12.** У Надежды Барышевой, работающей младшим бухгалтером с годовой зарплатой 96 тыс. руб., есть возможность окончить годичный курс обучения стоимостью 40 тыс. руб. и занять должность старшего бухгалтера. Насколько выше должна быть зарплата старшего бухгалтера, чтобы обучение было целесообразным, если Надежда считает приемлемой для себя нормой отдачи на вложения 15% годовых и собирается работать в новой должности:

а) до пенсии (30–40 лет);

б) 5 лет?

## Тесты

**1.** В потоке платежей разрешается переставлять платежи произвольным образом. Как их надо переставить, чтобы современная величина потока была наибольшей:

1) в порядке возрастания;

2) в порядке, который дает наименьшую наращенную сумму;

3) в порядке, который дает наибольшую наращенную сумму;

4) в порядке убывания;

5) имеющейся информации недостаточно?

**2.** Гражданину Петрову предлагается на выбор один из четырех вариантов трехгодовой ренты общей суммой 180 тыс. руб.:

а) равными платежами в конце каждого года;

б) равными платежами в конце нечетных годов;

в) одним платежом в конце второго года;

г) равными последовательными выплатами в конце каждого полугодия.

Петров как получатель денег имеет возможность ежегодного начисления процентов исходя из годовой ставки $i$ и, анализируя варианты, затрудняется в выборе наилучшего. Какой вариант вы ему посоветовали бы:

1) а;

2) б;

3) в;

4) г.

5) ответ зависит от числового значения ставки $i$?

**3.** Имеются три варианта замены годовой ренты постнумерандо ($\pi_1$) с параметрами $R = 90$ тыс. руб., $n = 3$ года, $i = 10\%$. При тех же длительностях и ставке процента даты начала и размеры выплат для рассматриваемых рент заданы следующими условиями:

$\pi_2$ – рента пренумерандо с платежом $R = 85$;

$\pi_3$ – отложенная на один период рента с платежом $R = 100$;

$\pi_4$ – отложенная на два периода рента с платежом $R = 107$.

Расположите все ренты в порядке убывания их выгодности для получателя денег:

1) $\pi_3$, $\pi_4$, $\pi_1$, $\pi_2$;

2) $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_1$, $\pi_4$;

3) $\pi_2$, $\pi_4$, $\pi_3$, $\pi_1$;

4) $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_4$, $\pi_3$.

**4.** На ближайшие 3 года общая сумма обязательств Петра перед Павлом составляет 400 тыс. руб., которые ему разрешается погасить не более чем за 3 раза. Согласно договоренности платежи могут производиться только в конце года и последняя выплата втрое превышает первую. Петр пытается найти наиболее выгодный для себя вариант предстоящих ему перечислений. Если приемлемый для него показатель доходности вложений – 10%, то оптимальные выплаты должны составлять следующую последовательность:

1) 75; 100; 225;

2) 90; 40; 270;

3) 50; 200; 150;

4) среди перечисленных вариантов оптимального нет.

**5.** Для одних и тех же годовых выплат, продолжительности и номинальной процентной ставки $i$ расположите в порядке возрастания наращенной суммы$\{S_k\}$следующие ренты:

$S_1$ : $p$ – срочная с начислением процентов $m$ раз в году ($p > 1$, $m > 1$);

$S_2$ : $p$ – срочная с непрерывным начислением процентов ($p > 1$, $\delta = i$);

$S_3$ : годовая рента с начислением по сложной ставке;

$S_4$ : $p$ – срочная с начислением процентов один раз в году ($p > 1$);

$S_5$ : годовая рента с начислением по простой ставке.

1) $S_5$; $S_1$; $S_4$; $S_3$; $S_2$;

2) $S_4$; $S_1$; $S_2$; $S_5$; $S_3$;

3) $S_3$; $S_5$; $S_2$; $S_4$; $S_1$;

4) $S_5$; $S_3$; $S_4$; $S_1$; $S_2$.

**6.** Победитель в конкурсе «А вам слабо?» получает в качестве назначенного организаторами приза ежегодный доход в 1000 долл. без ограничения срока действия этих поступлений. Ставка процента выросла с 8 до 10%. Тогда обладатель данного выигрыша будет иметь:

1) потери капитала в 400 долл.;

2) потери капитала в 500 долл.;

3) доход от прироста капитала в 500 долл.;

4) потери капитала в 2500 долл.;

5) доход от прироста капитала в 2500 долл.

**7.** Последовательность разновременных выплат заменяется одним платежом на дату, превышающую срок последней выплаты. Для определения заменяющего платежа применяют простые проценты. Чтобы найти финансово эквивалентную величину консолидирующей выплаты, можно воспользоваться:

1) равенством современных величин заменяемого потока и разовой выплаты;

2) равенством наращенной суммы потока платежей на дату разовой выплаты величине этой выплаты;

3) равенством современных величин или равенством наращенных сумм потока и искомого платежа – результат от этого не зависит.

**8.** Вы прочитали рекламное объявление: «Платите нам ежегодно любую доступную для вас сумму в течение 10 лет, а потом мы будем выплачивать вам ту же сумму в год бесконечно». Определить выгодность сделки:

1) эта сделка стоящая, если процентная ставка не превышает 9%;

2) это выгодно только в том случае, если размер взносов не больше 40 тыс. руб., а ставка ниже 5%;

3) при величине взносов больше 80 тыс. руб. данное предложение невыгодно при любом значении процентной ставки;

4) сделка целесообразна при значении ставки не больше, чем 7%, и произвольном размере выплаты.

**9.** Клиент сделал вклад на текущий счет в банке в сумме 100 тыс. руб. под простую ставку 14% годовых. Затем через 3 и 9 месяцев он вложил еще по 10 тыс. руб., а в промежутке, в конце 6-го месяца, снял со счета 20 тыс. руб. По завершении года клиент закрыл счет и забрал причитающиеся ему деньги. Определить, какое правило депозитного обслуживания (коммерческое или актуарное) выгоднее для вкладчика, и указать разницу в доходах:

1) полная сумма счета на конец года будет одна и та же независимо от используемого банком правила;

2) полученная по актуарному правилу сумма будет больше на 510 руб.;

3) для клиента выгоднее коммерческое правило, разница в доходах – 675 руб.;

4) предпочтительнее актуарное правило, разница – 830 руб.;

5) иной ответ.

**10.** Некто Иванов купил квартиру за $P$ тыс. долл. и собирается неограниченно долго сдавать ее в аренду. В своей оценке $R_\infty$ минимально приемлемого для него размера годового арендного платежа он использует ставку банковского процента $r$. Однако его супруга Ольга настаивает на продаже квартиры через $n$ лет и ограничивает аренду этим сроком. Как при этом изменится оценка $R_n$ арендной платы в зависимости от рыночной цены квартиры $P_n$ на дату $n$?

Найти процентное соотношение $R_n$ от $R_\infty$ при условии, что $P_n = 0{,}8\ P$, $r = 10\%$, $n = 2$:

1) арендная плата не зависит от соотношения цен $P$ и $P_n$;

2) при удорожании ($P_n > P$) арендная плата увеличится ($R_n > R_\infty$);

3) при падении цен на недвижимость ($P_n < P$) приемлемая для него арендная плата возрастет ($R_n > R_\infty$);

4) минимально приемлемый платеж возрастет на 95%;

5) минимально приемлемый платеж снизится на 20%.

**11.** Какую сумму должен отец вложить сегодня на накопительный вклад при простой годовой ставке 8%, чтобы обеспечить сыну ежегодные выплаты в размере 1000 у.е. в течение 4 лет обучения в колледже:

1) 3393,94 у.е.;

2) 3312,13 у.е.;

3) иной ответ?

**12.** Маша следует тенденциям моды, поэтому покупает себе каждый сезон новую сумку. Ее мама любит классику и предпочитает дорогие кожаные сумки, которые носит в среднем в течение 4 лет. На новый год папа дал жене и дочери на обновки по 200 долларов. Определить:

а) на сколько сезонов хватит Маше этих денег, если она будет каждый год приобретать по сумке стоимостью 50 долл., а остаток хранить на банковском счете с годовой процентной ставкой 12,6%;

б) по какой максимальной цене может покупать сумки Маша, чтобы они с мамой «износили» свои сумки в одно и то же время?

1) 5 лет;
2) 4 года;
3) 50 долл.;
4) 59,22 долл.;
5) 57,14 долл.

**13.** У Надежды Барышевой, работающей младшим бухгалтером с годовой зарплатой 144 тыс. руб., есть возможность окончить годичный курс обучения стоимостью 60 тыс. руб. и занять должность старшего бухгалтера. На сколько выше должна быть зарплата старшего бухгалтера, чтобы обучение было целесообразным, если Надежда считает приемлемой для себя нормой отдачи на вложения 15% годовых и собирается работать в новой должности:

а) всю оставшуюся трудовую жизнь (35–40 лет);

б) три года?

1) а) 30,6 тыс. руб.;
2) а) 9 тыс. руб.;
3) б) 89,347 тыс. руб.;
4) б) 26, 279 тыс. руб.

**14.** В потоке платежей разрешается переставлять платежи произвольным образом. Как их надо переставить, чтобы средний срок выплаты (дюрация) был наименьшим:

1) в порядке возрастания;
2) в порядке, который дает наименьшую наращенную сумму;
3) в порядке, который дает наибольшую наращенную сумму;
4) в порядке убывания?

**15.** Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода. Банк Б выплачивает 15% годовых по простой процентной ставке. Вкладчик разместил по одинаковой сумме денег в каждом из этих банков сроком на 2 года. Какую полугодовую процентную ставку должен начислять банк А, чтобы у вкладчика по итогам двух лет сумма вклада в банке А была на 10% больше, чем в банке Б?

1) 10,75%;
2) 8,64%;
3) 9,35%;
4) для ответа на вопрос необходимо знать величину первоначального вклада.

**16.** Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода по ставке 15% годовых. Банк Б выплачивает простые проценты. Вкладчик разместил по одинаковой сумме денег в каждом из этих банков сроком на 3 года. Какую процентную ставку должен начислять банк Б, чтобы у вкладчика по итогам трех лет суммы в банках А и Б были одинаковыми?

1) 16,45%;
2) 17,36%;
3) 18,11%;
4) 19,74%;
5) для ответа на вопрос необходимо знать величину первоначального вклада.

## Ответы и решения

### Расчетные задачи

**1.** 152,09. **2.** Сумма двух аннуитетов: с платежом 10 в течение 10 лет и начиная с 7-го года по 1 в течение 4 лет;

$PV = 10 \cdot a(10; 15) + 1 \cdot a(4; 15) \cdot \gamma(6; 15) = 51{,}42$ млн руб.

**3.** 43,68; схема пренумерандо (выплаты в начале периода).

**4.** а) Так как наращенная на дату замыкающего платежа сумма $S \approx 46{,}65 < 50$, то дата заменяющей выплаты $T > 150$. Пусть $T = 150 + x$. Для определения $x$ имеем следующее условие финансовой эквивалентности: $10 \cdot \left(1 + (100 + x) \cdot \dfrac{0{,}1}{365}\right) + 20 \cdot \left(1 + (70 + x) \cdot \dfrac{0{,}1}{365}\right) + 15 \left(1 + x \cdot \dfrac{0{,}1}{365}\right) = 50.$

Откуда $x \approx 352{,}22$, т.е. сумма в 50 млн руб. должна быть выплачена через 502 дня; б) по условию новый платеж равен сумме прежних: $45 = 10 + 20 + 15$, поэтому его срок не может превосходить даты последнего платежа ($T < 150$). Естественно, что снятие его суммы (45) в момент $T$ приведет на дату последней выплаты в точности к нулевому балансу:

$45(1 + (150 - T) \cdot 0{,}1/365) = 10(1 + 100 \cdot 0{,}1/365) + 20(1 + 70 \times$
$\times 0{,}1/365) + 15.$

Откуда $T \approx 97$ дней.

Можно доказать, что при замене платежей их суммой дата заменяющего платежа не зависит от процентной ставки и равна арифметической взвешенной исходных дат. Используя этот факт, получим тот же ответ:

$$T = \frac{10}{45} \cdot 50 + \frac{20}{45} \cdot 80 + \frac{15}{45} \cdot 150 \approx 97 \text{ дн.}$$

**5.** а) $A \approx 275{,}5$; $S = A(1 + 0{,}07)^3 = 337{,}499$ – рекомендуется решить задачу двумя способами: по формулам (2.6) и прямым счетом; б) $A_{1/2} =$ $= A(1 + i)^{1/2} = 275{,}5 \cdot 1{,}07^{1/2} = 284{,}979$; $S_{1/2} = S(1 + i)^{1/2} = 337{,}499 \times$ $\times 1{,}07^{1/2} = 349{,}112$.

**6.** $A = 2112{,}8$ тыс. руб.; $S = 3367{,}49$ тыс. руб.

**7.** Заданную годовую ставку можно рассматривать как эффективную ставку для непрерывного начисления с силой роста $\delta : e^\delta = 1{,}08$. Тогда наращенная сумма

$$S = \int_0^{10} 1 \cdot e^{(\ln 1{,}08) \cdot t} dt = 1 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{\ln 1{,}08} = 15{,}06 \text{ млн руб.}$$

**8.** а) С поправкой на инфляцию дискретный поток состоит из трех платежей: $R_1 = 105$; $R_2 = 110{,}25$; $R_3 = 115{,}7625$; его современная стоимость $A = 288{,}9222$ тыс. руб.; б) для того чтобы учесть инфляцию, применим схему непрерывного прироста платежей с таким темпом $\delta$, что $e^\delta = 1{,}05$. Для дисконтирования воспользуемся ставкой непрерывного процента $\gamma$ по заданной номинальной ставке: $e^\gamma = 1{,}07$. Тогда современная стоимость с учетом инфляции составит:

$$A = \int_0^3 \mathrm{R} e^{(\delta-\gamma)t}\, dt = \frac{1}{\delta - \gamma} R(e^{3(\delta-\gamma)} - 1) = \frac{1}{\ln(1{,}05/1{,}07)} \cdot 100 \cdot \left[\frac{1{,}05^3}{1{,}07^3} - 1\right] =$$

$$= \frac{100 \cdot 0{,}055}{0{,}01887} \approx 291{,}67 \text{ тыс. руб.}$$

Недооценка инфляции при использовании приближения «а» составила 3378 руб., или порядка 1,15%.

**9.** а) $S = 250 \cdot s(6;7{,}5) = 250 \cdot 7{,}24402 \approx 1811{,}0$ тыс. руб.;

б) согласно (2.1) при $p = 2$, $m = 4$ $S = 250\dfrac{1{,}0375^{12} - 1}{1{,}0375^2 - 1} = 1817{,}33$ тыс. руб.

**10.** а) 34,34; б) 86,8.

**11.** а) 2300 долл.; б) 980 долл.

**12.** Текущая стоимость $A$ должна привести к моменту последней выплаты к нулевому балансу полной суммы счета, определяемой в соответствии с коммерческим правилом:

$$A(1 + 3 \cdot 0{,}2) = 200(1 + 2 \cdot 0{,}2) - 500(1 + 0{,}2) + 600 \text{ и } A = 175.$$

В развернутой форме этому решению отвечает табл. 2.2.

Таблица 2.2

| Номер года (окончание) | Состояние основного счета | Состояние процентного счета | Полная сумма счета на конец года |
|---|---|---|---|
| 1 | 200 | 0 | 200 |
| 2 | –300 | 40 | –260 |
| 3 | 300 | 40–60 | 280 |

Откуда $A = \dfrac{280}{1{,}6} = 175.$

**13.** $S$ = 340; $A$ = 184,52; Совпадают: для сравниваемых моделей обеспечение (финансирование) потока CF означает попросту обеспечение суммы каждого платежа, иначе говоря, текущая стоимость потока равна сумме текущих стоимостей отдельных платежей.

**14.** а) Решению соответствует табл. 2.3

Таблица 2.3

| Номер года (окончание) | Состояние основного счета | Состояние процентного счета | Полная сумма счета на конец года |
|---|---|---|---|
| 1 | 1200 | 200 | 1200 + 200 = 1400 |
| 2 | –300 | 200 + 0,2 · 1200 = 440 | –300 + 440 = 140 |
| 3 | 600 | 440 – 0,2 · 300 = 380 | 600 + 380 = 980 |
| 4 | 400 | 380 + 0,2 · 600 = 500 | 400 + 500 = 900 |
| 5 | 500 | 500 + 0,2 · 400 = 580 | 500 + 580 = 1080 |

б) решению соответствует табл. 2.4.

Таблица 2.4

| Номер года (окончание) | Состояние основного счета | Состояние процентного счета | Полная сумма счета на конец года |
|---|---|---|---|
| 1 | 1200 | 200 | 1200 + 200 = 1400 |
| 2 | 1200 – (1500 – – 440) = 140 | 200 + 240 – 440 = 0 | 140 |
| 3 | 1040 | 28 | 1040 + 28 = 1068 |
| 4 | 1040 | 28 + 208 – 200 = 36 | 1040 + 36 = 1076 |
| 5 | 1140 | 36 + 208 = 244 | 1140 + 244 = 1384 |

**15.** а) 183,153 тыс. руб.; б) 201,468; в) 192,092.

**16.** а) 32,759 тыс. руб.; б) 29,78 тыс. руб.

**17.** Полагая в (2.1) $m = 1$, $p = 2$, $n = \infty$, $R/p = 5$, найдем $A =$

$$= \frac{5}{1{,}25^{1/2} - 1} \approx 42{,}361 \text{ тыс. руб.}$$

**18.** Верхний предел цены $P$ должен совпадать с ценой станка, уравнивающей выгодность рассматриваемых альтернатив, т.е. являться сегодняшним эквивалентом потока доходов CF={(1, 2000); (2,2000); (3, 2000 + 6000)} при ставке 8%. Откуда следует, что $P =$ $= 2000 \cdot a(3;8) + 6000 \cdot \gamma(3,8) \approx 9917{,}19$ долл.

**19.** а) $$A_1 = 6 + \frac{0{,}8}{1{,}1^5} + \frac{0{,}8}{1{,}1^{10}} + \ldots + \frac{0{,}8}{1{,}1^{50}} = 6 + \frac{0{,}8 \cdot \alpha(50;10)}{s(5;10)} = 6 + \frac{0{,}8 \cdot 9{,}91}{6{,}1051} =$$

$= 7{,}298;$

$$A_2 = 7 + \frac{0{,}4 \cdot \alpha(50;10)}{s(10;10)} = 7{,}25.$$

Варианты практически равноценны: чем ниже ставка, тем больше влияние стоимости ремонтных работ и меньше – первоначальных затрат. С учетом будущей неопределенности ($i \leq 10\%$) следует предпочесть второй вариант; б) при $i = 15\%$ тем же способом, что и в «а», найдем $A_1 = 6{,}79$ и $A_2 = 7{,}13$.Согласно предположению фактическая ставка может быть только выше, чем 15%. Поэтому следует выбрать первый вариант. Задачу можно решить с помощью функции

Excel для вычисления внутренней ставки доходности. Для этого следует перейти к дискретной ренте с периодом, равным промежутку $m$ между платежами, и ставкой начисления $j = (1 + i)^m - 1$.

**20.** $S = 500 \cdot 1{,}06^{2-1/4} + 525 \cdot 1{,}06^{2-1/2} + ... + (500 + 25 \cdot (8 - 1)) = 4257{,}5$ тыс. руб., $A = S \cdot 1{,}06^{-2} = 3789{,}247$ тыс. руб.

**21.** $S = \int_0^n \mathrm{Re}^{0{,}08t}\, dt = 5R$, откуда $n = \dfrac{\ln(1 + 5 \cdot 0{,}08)}{0{,}08} \approx 4{,}21$ года.

**22.** а) 2,88 млн руб.; б) нет; в) нет; г) 2,487 млн руб.

**23.** а) $2 \cdot a(5;\, 8) = 2 \cdot a(x;8) \cdot \gamma(3;8) = 7{,}9854$, т. е. $1{,}08^3(1 - 1{,}08^{-5}) = (1 - 1{,}08^{-x})$. Откуда $x \approx 6{,}69$ года; б) нет; в) нет; г) эту недоимку можно погасить разовой выплатой с учетом требования финансовой эквивалентности. Чтобы ее найти, следует расчетное число лет округлить до меньшего значения. Тогда современная величина соответствующего потока будет меньше заданной: $7{,}3396 < 7{,}9854$, и недоплата составит 0,6458.

**24.** $TC = 60 \cdot \alpha(11;\, 8\%) \cdot \gamma(9;\, 8\%) \approx 60 \cdot 7{,}139 \cdot 0{,}5 = 214{,}17$ долл.

**25.** а) 15,72 года; б) для скорректированного срока $T^* = 15$ последовательность платежей не полностью обеспечивает погашение долга. Разность в 287751 руб. должна быть выплачена кредитору в начале или должен быть несколько увеличен размер годового платежа. Находим $R = 10/\, \alpha(15,\, 6\%) = 1{,}0296286$ млн руб.

**Аналитические задачи**

**1.** а) $A_t = A(1 + i)^{-t}$; б) $A = A_1(1 + i)$; в) $A = \dfrac{R(1+i)(1-(1+i)^{-n})}{i}$.

**2.** а) $R = \dfrac{1-(1+i)^{-mr}}{(1+i)^r - 1}$, $S = A(1+i)^{mr}$; б) $A^* = A(1 + i)^r$, $S^* = S(1 + i)^r$.

**3.** $A = R(1 + \dfrac{1}{(1+i)^r} + \dfrac{1}{(1+i)^{2r}} + \dfrac{1}{(1+i)^{3r}} + ...)$. Искомая характеристика совпадает с суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{(1+i)^r} : A = \frac{R}{1-(1+i)^{-r}} = \frac{R(1+i)^r}{(1+i)^r - 1}.$$

**4.** $S = RN(1 + i(N - 1)/2p)$, где $N = np$ – общее число платежей.

**5.** а) $R_2 = R_1(1 + i)^t$; б) $R_2 = R_1(1 + i/m)^{tm}$.

**6.** а) $n = \dfrac{-\log(1-(1-(1+i)^{-n_1})(1+i)^t)}{\log(1+i)}$, $n_2 = [n]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $n$;

б) $\Delta = Ra(n_1;\, i) - Ra(n_2;\, i)(1+i)^{-t}$; в) разницу $\Delta$ можно погасить замыкающим платежом $Q = \Delta(1+i)^{(t+n_2)}$.

**7.** $\sum\limits_1^n S_j\left(1+\dfrac{t_j}{365}\cdot i\right) = S_0\left(1+\dfrac{n_0}{365}\cdot i\right)$. Откуда получим $n_0 = \dfrac{\sum n_j S_j}{\sum S_j}$.

**8.** Состояние счета определяется объединением наращенных сумм первоначального вклада и потока довложений:

$$S = P(1+r)^T + g\frac{(1+r)^T - 1}{r} = (P + g/r)(1+r)^T - g/r.$$

**Ситуационные задачи**

**1.** а) $A_1(1 + 4\cdot 0{,}08) - 1000(1 + 3\cdot 0{,}08) - 1000(1 + 2\cdot 0{,}08) - 1000(1 + 1\cdot 0{,}08) - 1000 = 0$; $A_1 = 3393{,}94$;

б) $A_2 = 1000\cdot\alpha(4{,}8) = 3312{,}13$.

**2.** а) полная сумма счета в конце десятого года составит для первого варианта величину $S_1 = 14139{,}82$ и величину $S_2 = 14147{,}08$ для второго. Вариант 2 предпочтительнее; б) при снижении нормы процента по второму варианту вложений наращенная в течение 10 лет сумма уменьшится до величины $S_2^* = 13816{,}44$. Теперь предпочтительнее вариант 1.

**3.** Сделка стоящая, если ставка не превышает 7%.

**4.** Предпочтительнее окажется: а) второй вариант завещания; б) первый вариант.

**5.** $S = 100\cdot s(24;\, 5) \approx 4450$ руб.

**6.** $24\cdot\gamma(10;\, 12)/0{,}12 = 64{,}394$ тыс. руб.

**7.** Согласно предложению секретарши, ее зарплата в первом году – 6250 долл., во втором – 6750, затем – 7250 и т.д., а по варианту ее начальника – 6000, 7000, 8000. В году $n$ превышение составит величину $\Delta_n = 500n - 750$. Применим формулу (2.5) для бессрочной ренты с платежом равным $\Delta_n$. Для этого положим $R_1 = -250$, $a = 500$, $n = \infty$. Откуда $A = (-250 + 500/i)$. При $i < 1$ величина $A > 0$.Следовательно, для начальника вариант секретарши экономичнее и, приняв его, он поступил мудро. Эту задачу можно решить проще: заменим полугодовую ренту годовой с абсолютным приростом платежей, начиная со следующего года, на величину $\Delta = 250(1 + i/2) + 250$. Поскольку $i < 1$, $\Delta < 625 < 1000$, то получим тот же ответ.

**8.** 1295,05 долл.

**9.** 800 тыс. долл.

**10.** а) 5 лет; б) 59,22 долл.

**11.** Для пенсионера поток ежемесячных выплат по 150 долл. имеет современную величину 13608, а для фирмы – 11390. Отсюда понятно, что предлагаемый Ивановым вариант выгоден для фирмы и невыгоден для него.

**12.** Вложения в образование эффективны, если выгоды, по меньшей мере, равны затратам: а) 20400 руб.; б) 40571 руб.

**Тесты**

**1.** (3), (4). **2.**(4). **3.** (2). **4.** (4). **5.** (4). **6.** (4). **7.** (2). **8.** (4). **9.** (2). **10.** (3), (4). **11.** (1). **12.** (1), (4). **13.** (1), (4). **14.** (3), (4). **15.** (3). **16.** (3).

# Раздел 3
# КРЕДИТ

Настоящий раздел содержит только детерминированные постановки; иначе говоря, возможные для участников кредитных отношений риски и методы их ограничения не рассматриваются. Основное внимание уделяется базовым понятиям и типовым кредитным расчетам, основанным на тех же правилах, что применялись при решении задач анализа потоков платежей.

## 3.1. Основные понятия и формулы

**Первичные характеристики.** Величина займа (основной долг) – $D$; срок погашения – $n$; кредитная ставка (простая, сложная, учетная) – $i$.

Условия выдачи и погашения кредитов, займов, ссуд весьма разнообразны. При этом в качестве ограничения, определяющего поток погашающих платежей, выступает требование его финансовой эквивалентности величине долга $D$.

**Разовое погашение кредита в конце срока.** Ссуда $D$ выдана на $n$ лет под годовую ставку сложного процента $i$. Размер погашающего платежа:

$$Y = D(1 + i)^n. \tag{3.1}$$

Этот платеж состоит из двух частей – возврата основного долга $D$ и выплаты процентов:

$I = D(1 + i)^n - D : Y = D + I.$

**Погашение кредита потоком платежей.** Пусть $Y_t$ – величина погашающего платежа в конце года $t$, $t = 1, 2, ..., n$. Срочные уплаты $\{Y_t\}$ должны удовлетворять следующему условию финансовой эквивалентности:

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t (1+i)^{-t} = D. \tag{3.2}$$

Выплаты $Y_t$ охватывают средства $D_t$, предназначенные для амортизации основного долга, и проценты $I_t$, выплачиваемые на остаток долга на начало года $t$:

$$I_t = i(D - \sum_{k=1}^{t-1} D_k). \qquad (3.3)$$

При таком назначении текущих процентных выплат кредит будет погашен в течение предусмотренного срока $n$ при условии, что сумма всех промежуточных возвратов долга $D_t$ равняется величине займа $D$:

$$\sum_{t=1}^{n} D_t = D. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим поток произведенных в счет погашения долга срочных уплат $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_k$. Эти платежи покрывают «набежавшие» за $k$ лет проценты и погашение части долга. Наращенная на конец $k$-го года величина выданной ссуды $D(1 + i)^k$ содержит долг $D$ и начисленные за тот же срок проценты. Эти же проценты присутствуют в выплатах $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_k$ и, значит, финансово-эквивалентная им на момент $k$ величина содержится в наращенной сумме:

$$S_k = \sum_{t=1}^{k} Y_t (1+i)^{k-t}.$$

Поэтому остаток долга $L_k$ на конец любого года $k$ будет равен разности между наращенной на эту дату величиной долга и наращенной на ту же дату суммой всех произведенных выплат:

$$L_k = D(1+i)^k - \sum_{t=1}^{k} Y_t (1+i)^{k-t}. \qquad (3.5)$$

Использование этих правил позволяет планировать погашение задолженности по составляющим $I_t$ , $D_t$ суммарной выплаты $Y_t$ и следить за динамикой изменения долга (его остатка) или, основываясь на планируемых срочных уплатах $\{Y_t\}$ (3.2), разбить их на процентные $\{I_t\}$ и долговые $\{D_t\}$ выплаты.

Приведем распространенные кредитные схемы – частные случаи потоков срочных уплат (3.2) и условий (3.3), (3.4).

**Погашение основного долга одним платежом в конце (равные процентные выплаты).** $D_1 = D_2 = ... = D_{n-1} = 0$, $D_n = D$.

Тогда согласно (3.3) проценты $I_1 = I_2 = \ldots = I_n = iD$. Складывая, получим следующую последовательность срочных уплат: $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = iD$, $Y_n = iD + D$. В этой схеме кредит обслуживается равными процентными выплатами и разовым погашением основного долга одним платежом в конце срока. При погашении долгосрочного кредита данным способом величина задолженности для каждого промежуточного года не меняется и учитывается в годовой бухгалтерской отчетности в долгосрочных пассивах в размере $D$.

**Погашение основного долга равными ежегодными суммами.** Долг делится поровну между всеми ежегодными платежами, т. е. $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = D/n$. Последовательность процентных платежей (3.3), отвечающая этому правилу, образует убывающую арифметическую прогрессию:

$$I_1 = iD,\ I_2 = i(D - \mathrm{D/n}),\ \ldots,\ I_t = i(D - D(t-1)/n),\ \ldots,\ I_n = iD/n.$$

**Погашения кредита равными годовыми выплатами.** $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = Y$. Эти выплаты образуют годовую ренту. Приравнивая ее современную величину сумме основного долга (3.2), получим уравнение:

$$Y \cdot \alpha(n, i) = D.$$

Откуда

$$Y = D/\alpha(n,i) = \frac{Di}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{3.6}$$

Отсюда и по правилу (3.3) можно найти размеры процентных выплат и погашающих долг сумм:

$$\begin{aligned} &I_1 = iD; && D_1 = Y - I_1; \\ &I_2 = i(D - D_1); && D_2 = Y - I_2; \\ &I_t = i(D - \sum_{k=1}^{t-1} D_k); && D_t = Y - I_t,\ t = 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В принципе в правилах кредитных расчетов ничего не изменится, если срочные уплаты будут производиться несколько раз в год при условии, что за единичный период начисления процентов принят промежуток между двумя уплатами (число $p$ платежей в году равно числу $m$ начислений процентов в течение года,

$p = m$). В этом случае в приведенных выше формулах вместо годовой ставки подставляется ставка начисления $i/m$ на единичном периоде, а вместо длительности $n$ в годах – длительность в единичных периодах $nm$. Например, для схемы равных срочных уплат (3.6), руководствуясь данным соответствием, найдем, что величина взноса

$$Y = \frac{D \cdot i/m}{1-(1+i/m)^{-nm}}. \tag{3.8}$$

**Погасительный фонд.** В качестве поясняющего примера рассмотрим схему равных процентных выплат. Пусть бюджетные возможности заемщика ограничивают размеры его ежегодных погашений величиной $\pi$, которая превышает процентную выплату, но это превышение не покрывает долга. В этой ситуации, чтобы возвратить разовым платежом в конце обусловленного срока сумму долга, заемщик может накопить необходимые средства, используя бюджетный остаток $\Delta_t = \pi - iD$. Необходимый для этого фонд формируется из последовательных взносов (например, на специальном счете в банке), на которые начисляются проценты.

**Планирование погасительного фонда (равные взносы).** В схеме равных процентов, для того чтобы накопить требуемую сумму $D$ с помощью ежегодных взносов $R$ за срок $n$, используется фонд со ставкой начисления сложного процента $j$. По условию наращенная сумма составленной из этих взносов годовой ренты равна:

$$S = R \cdot s(n;j) = R \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j} = D. \tag{3.9}$$

Откуда

$$R = \frac{Dj}{(1+j)^n - 1}.$$

Одновременно происходит выплата кредитору процентов, начисляемых на долг по ставке $i$. В этом случае срочная уплата составит величину $Y = Di + R$.

Допустим, что заемщик не может перечислять в погасительный фонд суммы, превосходящие величину $E$. Полагая $R = E$, можно рассчитать минимально допустимый для него срок погашения $n_{min}$. Для этого потребуется решить простейшее показательное уравнение вида $a^x = b$:

$$E \cdot \frac{(1+j)^{n_{\min}} - 1}{j} = D. \tag{3.10}$$

Рассмотренное не исчерпывает возможных планов создания погасительных фондов: неравными взносами, накопление для погашения единым платежом в конце срока и т. д.

**Потребительский кредит.** В потребительском кредите на всю сумму кредита начисляются простые проценты, которые прибавляются к величине самого кредита, и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. При равных выплатах величина одного платежа получается делением этой суммы на их число. Реальная цена кредита для покупателя определяется ставкой сложного процента, для которой современная величина выплат по кредиту равна основному долгу.

**Равномерное погашение потребительского кредита.** Пусть кредит размером $D$ взят на $n$ лет под годовую ставку простых процентов $i$. Следовательно, сумма долга с процентами составит:

$$S = D(1 + ni).$$

Если в год предусмотрено (договором о кредите) $p$ выплат, то одна выплата $Y$ равна:

$$S/pn = D(1 + ni) \,/\, pn.$$

Величина $Y$ в принятых выше терминах представляет собой срочную уплату.

Возникает вопрос, как расчленить $Y$ на погашение процентов и основного долга. Для этого применяется правило деления некоторого числа на части пропорционально данным числам. В качестве исходных данных, позволяющих получить требуемое соотношение пропорциональности, началу каждого периода ставится в соответствие число, равное количеству оставшихся выплат:

$$(1; pn), (2; pn - 1), ..., (k; pn - (k - 1)), ..., (pn; 1). \tag{3.11}$$

Тогда правило определения последовательных процентных погашений $I_1$, $I_2$, ..., $I_k$, ..., $I_{pn}$ сводится к делению всей суммы процентов $I = Dni$ пропорционально числу оставшихся относительно начала каждого периода срочных уплат:

$$I_k = \frac{pn - k + 1}{1 + 2 + ... + pn} \cdot Dni = \frac{pn - k + 1}{pn(pn + 1)/2} \cdot Dni, k = 1, 2, ..., pn. \quad (3.12)$$

Соответственно сумма погашения долга: $D_k = Y - I_k$.

Отсюда для частного случая, когда кредит выдается на один год с помесячным погашением, получим так называемое правило числа 78. Знаменатель формулы (3.11), как легко понять, равен сумме порядковых номеров всех выплат. В рассматриваемом варианте эта сумма равна 78:

$$\sum_{k=1}^{12} k = 78,$$

отсюда и название правила.

Обозначим ставку сложного процента, под которую выдается потребительский кредит, через $j$ и допустим, что число начислений процентов $m$ в течение года совпадает с числом выплат по кредиту $p$ ($m = p$). Ставка $j$ определяется из условия равенства современной величины выплат по кредиту его номинальной величине:

$$[D(1 + ni) / pn]\alpha(pn, j/m) = D, m = p. \quad (3.13)$$

Данное уравнение можно записать в виде многочлена от неизвестной ставки. Для определения его корня можно воспользоваться функцией Excel для расчета внутренней ставки доходности.

Разумеется, что в зависимости от возможностей участников кредитного договора величина $m$ не обязана совпадать с $p$, например, заемщик может начислять процент один раз в году. Тогда для определения кредитной ставки ему следует решить то же уравнение (3.13) при условии, что $m = 1$.

**Ипотечная ссуда.** Такая ссуда выдается под залог недвижимости и имеет длительный срок погашения. В связи с этим существует достаточно большое количество различных схем погашения долга по ипотеке, учитывающих возраст заемщиков, их материальное и семейное положение и прочее. В случае непогашения ссуды в установленный срок заложенное имущество становится собственностью кредитора.

Традиционная ипотечная ссуда погашается равными ежемесячными выплатами, на которые ежемесячно же начисляются проценты. Величина ежемесячного платежа $Y$ и остатка $L_k$ долга после очередного взноса определяются формулами (3.8), (3.5):

$$Y = \frac{Di/12}{1-(1+i/12)^{-12n}}, \quad L_k = D(1+i/12)^k - Y \cdot s(k, i/12). \qquad (3.14)$$

**Замена и объединение займов.** Параметры нового кредитного соглашения подбирают исходя из требования его финансовой эквивалентности исходным условиям кредитования.

**Льготные кредиты.** В ряде случаев долгосрочные займы выдаются под льготные условия. Низкая процентная ставка, предусматриваемая таким займом, в сочетании с большим его сроком и льготным периодом дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Размер этой помощи можно оценить через абсолютное или относительное превышение объема займа $D$ над суммой $G$ дисконтированных по обычной (не льготной) ставке платежей, поступающих в счет его погашения:

$$W = D - G; \; w = W/D.$$

Список типовых приемов решения задач планирования и анализа кредитных операций можно продолжить, рассмотрев, в том числе, ссудные и учетные операции с удержанием комиссионных, коммерческие сделки купли-продажи товаров в кредит и т.д. Способы решения подобных задач достаточно просто получить самостоятельно, опираясь на правила действия с процентами и гибко используя принцип финансовой эквивалентности, основанный на сопоставлении обобщенных характеристик сравниваемых потоков платежей.

## 3.2. Типовые примеры

Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Вместе с тем независимо от частностей можно выделить две группы взаимосвязанных задач:

1) при заданных параметрах кредита ($D$, $n$, $i$) определить способ его погашения;

2) при заданных ограничениях на использование и погашение заемных средств определить требуемые параметры кредита.

1. *Равные срочные уплаты.*

Кредит в размере 900 тыс. руб. сроком на 4 года взят под ставку 5% годовых. Составить план погашения равными срочными уплатами.

Решение

По условию задачи $D = 900000$, $n = 4$, $i = 0{,}05$. Подставляя эти значения в формулу (3.6), находим $Y = 900000/3{,}54595 = 253810{,}6854$ руб.

Записываем план погашения долга в виде таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

| Год, $t$ | Остаток долга на начало $t$-го года, $L_t = L_{t-1} - D_{t-1}$ | Срочная уплата, $Y_t = Y$ | Выплата процентов в году $t$ ($I_t = 0{,}05 \cdot L_t$) | Выплата по долгу в году $t$ ($D_t = Y - I_t$) |
|---|---|---|---|---|
| 1-й | 900000 | 253810,6854 | 45000 | 208810,6854 |
| 2-й | 691189,3146 | 253810,6854 | 34559,46573 | 219251,2197 |
| 3-й | 471938,0949 | 253810,6854 | 23596,90474 | 230213,7807 |
| 4-й | 241724,3142 | 253810,6854 | 12086,21571 | 241724,4697 |

Примечание. $D_4$ совпадает с $L_4$ с точностью до первого знака после запятой; указанное расхождение обусловлено принятой точностью вычислений (до четвертого знака). В приложениях можно использовать приближенные с точностью до целых значения $\{Y, I_t, D_t\}$. При этом чтобы избежать отмеченного выше расхождения, целесообразно замыкающую по долгу выплату полагать равной остатку задолженности на начало последнего года.

2. *Равные выплаты по долгу.*

Долг в сумме 1 млн руб. требуется погасить за 5 лет равными суммами, выплачиваемыми в конце года. За заем начисляются проценты по годовой ставке 10%. Составить план погашения.

Решение

Расчеты и план погашения кредита представим в табл. 3.2.

Таблица 3.2

| Год | Остаток долга на начало года, $L_t = L_{t-1} - \frac{D}{n}$ | Выплата по долгу, $D_t = \frac{D}{n} = \frac{100\,000}{5}$ | Выплата процентов, $I_t = 0{,}1 \cdot L_t$ | Срочная уплата, $Y_t = D_t + I_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1-й | 1000000 | 200000 | 100000 | 300000 |
| 2-й | 800000 | 200000 | 80000 | 280000 |
| 3-й | 600000 | 200000 | 60000 | 260000 |
| 4-й | 400000 | 200000 | 40000 | 240000 |
| 5-й | 200000 | 200000 | 20000 | 220000 |

**3.** *Погашение кредита потоком платежей.*

Долг в 100 тыс. долл. решено погасить по специальному графику за 4 года. Ежегодные платежи по первым трем годам определены в размере 40, 20 и 30 тыс. долл. Ставка процента по долгу установлена на уровне 10%. Определите:

а) остаток долга на конец третьего (начало четвертого) года;

б) величину четвертой срочной уплаты;

в) чему равны ежегодные суммы погашения долга и процентов.

Решение

а) согласно формуле (3.5) имеем:

$$L_3 = 100(1 + 0{,}1)^3 - 40(1 + 0{,}1)^2 - 20(1 + 0{,}1) - 30 = 32{,}7;$$

б) $Y_4 = L_3(1 + 0{,}1) = 35{,}97$. Эту величину можно также вычислить из уравнения (3.2) финансовой эквивалентности потока погашающих платежей величине долга:

$$Y_4 = 100(1 + 0{,}1)^4 - 40(1 + 0{,}1)^3 - 20(1 + 0{,}1)^2 - 30(1 + 0{,}1) =$$
$$= 146{,}41 - 53{,}24 - 24{,}2 - 33 = 35{,}97;$$

в) табл. 3.3 иллюстрирует порядок расчетов выплат по долгу и процентам.

Таблица 3.3

| Год | Остаток долга на начало года | Срочная уплата, долл. | Выплата процентов | Выплата по долгу |
|---|---|---|---|---|
| 1-й | 100000 | 40000 | 10000 | 30000 |
| 2-й | 70000 | 20000 | 7000 | 13000 |
| 3-й | 57000 | 30000 | 5700 | 24300 |
| 4-й | 32700 | 35970 | 3270 | 32700 |

**4.** *Определение срока, на который берется кредит.*

Для выхода на полную мощность предприятие нуждается в кредите на пополнение оборотного капитала. Требуемая сумма – 7 млн руб., доступная кредитная ставка – 12% годовых, длительность операционного цикла (время оборота оборотного капитала) – 1 месяц. Кредит планируется погасить одним платежом. Для получения необходимой для этого суммы предполагается использовать чистую прибыль в размере 1 420 000 руб./мес., которую будет получать предприятие в режиме полной загрузки. В качестве способа накопления этой суммы формируется погасительный фонд с начислением процентов один раз в году по той же ставке 12%. Определить допустимый для предприятия срок заимствования средств.

Решение

Для получения ответа воспользуемся формулой наращенной суммы ренты (2.1) с характеристиками $p = 12$, $m = 1$, $i = 0{,}12$, $R/p = 110000$ и приравняем ее требуемой величине погашающего в конце срока $x$ платежа. В результате получим следующее соотношение:

$$1420000 \cdot \frac{(1+0{,}12)^x - 1}{(1+0{,}12)^{1/12} - 1} = 7000000 \cdot (1 + 0{,}12)^x,$$

что дает простейшее показательное уравнение

$$1{,}12^x = 1{,}0491$$

с решением:

$$x = \frac{\ln 1{,}0491}{\ln 1{,}12} \approx \frac{0{,}0479}{0{,}1133} \approx 0{,}42 \text{ года} \approx 5 \text{ мес.}$$

Примечание. Разумеется, ставка погасительного фонда не обязательно совпадает с кредитной ставкой. При различных ставках уравнение, содержащее неизвестную $x$ в показателе степени, уже не будет сводиться к простейшему типу $a^x = b$, однако эти трудности носят вычислительный характер и вполне преодолимы.

**5. Потребительский кредит.** Покупатель приобрел в кредит холодильник по цене 4000 руб. При оформлении кредита он внес 1000 руб., обязавшись погасить остальное в течение 6 месяцев, делая ежемесячно равные взносы. Определить:

а) сумму, которую покупатель должен выплачивать ежемесячно, если продавец требует за кредит 6% в год;

б) реальную доходность кредитной операции для продавца при условии, что имеется возможность помесячного реинвестирования;

в) рассчитать график погашения процентов и основного долга.

Решение

а) Сумма кредита с начисленными процентами составляет величину:

$$S = 3000(1 + 0{,}06 \cdot 0{,}5) = 3090 \text{ руб.}$$

Следовательно, ежемесячно покупатель должен выплачивать продавцу 3090/6 = 515 руб.;

б) реальная доходность измеряется ставкой сложного процента. Обозначим номинальную годовую ставку через $j$. Тогда помесячная ставка сложного процента: $x = j/12$. Имеем уравнение: $515(1 - (1 + x)^{-6})/x = 3000$ с областью допустимых значений $x \neq -1$, $x \neq 0$. Заменой переменной $z = 1 + x$ придем к уравнению $5,825z^7 - 6{,}825z^6 + 1 = 0$. Из ограничений на допустимые значения $x$ вытекает, что $z \neq 0$, $z \neq 1$. Это уравнение имеет два положительных корня: $z_1 = 1$ и $z_2 \approx 1{,}00852$, из которых допустимым является только второй. Откуда $x = 0{,}00852$ и, следовательно, годовая ставка $j = 12x = 0{,}10224$. Таким образом, реальная доходность для кредитора $j = 10{,}2\%$ превышает объявленную им простую ставку потребительского кредита $i = 6\%$ на 4,2%;

в) по условиям примера общая сумма начисленных процентов $I = 90$, а запись (3.11) примет вид: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).

Согласно (3.12) для определения последовательных процентных погашений следует разделить величину $I = 90$ на части пропорционально числу оставшихся выплат, т.е. в соотношении

6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1. Воспользовавшись сформулированным правилом, найдем суммы в счет уплаты процентов:

$$I_1 = 90 \cdot 6/(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 540/21 \approx 25{,}71;$$
$$I_2 = 90 \cdot 5/21 \approx 21{,}42;\ I_3 \approx 90 \cdot 4/21 = 17{,}14;\ I_4 = 90 \cdot 3/21 \approx 12{,}86;$$
$$I_5 = 90 \cdot 2/21 \approx 8{,}57;\ I_6 = 90 \cdot 1/21 \approx 4{,}28.$$

Помесячная разность между срочной уплатой и процентным платежом выделяется на погашение основного долга:

$$D_1 = 515 - 25{,}71 = 489{,}29;\ D_2 = 515 - 21{,}42 = 493{,}58;$$
$$D_3 = 515 - 17{,}14 = 497{,}86;\ D_4 = 515 - 12{,}86 = 502{,}14;$$
$$D_5 = 515 - 8{,}57 = 506{,}43;\ D_6 = 515 - 4{,}28 = 510{,}72.$$

Имея эти значения, найдем остаток основного долга на начало каждого месяца:

$$L_1 = 3000;\ L_2 = 3000 - 489{,}29 = 2510{,}71;$$
$$L_3 = 2510{,}71 - 493{,}58 = 2017{,}13;\ L_4 = 2017{,}13 - 497{,}86 = 1519{,}27;$$
$$L_5 = 1519{,}27 - 502{,}14 = 1017{,}13;\ L_6 = 1017{,}13 - 506{,}43 = 510{,}7.$$

Сумма $D_6$ погашения долга в конце срока полностью списывает оставшуюся задолженность $L_6$: $D_6 = L_6 = 510{,}7$. Нетрудно убедиться, что проценты уменьшаются, а суммы, погашающие долг, растут.

**6.** *Стандартная ипотека.* Ипотечная ссуда в размере 300 тыс. руб. выдана сроком на 15 лет. Погашение – в конце каждого месяца, номинальная годовая ставка – 12%. Определить сумму ежемесячного платежа и остаток долга на конец пятого года погашения.

Решение

Равные ежемесячные выплаты размером $Y$ образуют простую ренту длительности $n = 15 \cdot 12 = 180$ единичных периодов (месяцев) начисления процента под ставку $i = 12\% / 12 = 1\%$. Следовательно, ее наращенная величина

$$S(Y) = Y \cdot \frac{(1+0{,}01)^{180} - 1}{0{,}01},$$

и для определения $Y$ имеем уравнение

$$S(Y) = 300(1 + 0{,}01)^{180},$$

т. е.

$$Y \cdot 100 \cdot (5{,}9958 - 1) = 499{,}58\ Y = 300 \cdot 5{,}9958.$$

Теперь можно определить ежемесячный взнос: $Y = 3{,}6$ тыс. руб. = = 3600 руб.

Наращенная за 5 лет величина ссуды при условии помесячного начисления процентов составит сумму

$$S_5 = 300(1 + 0{,}01)^{60} = 300 \cdot 1{,}8167 = 545{,}02,$$

наращенная величина произведенных выплат есть:

$$3{,}6 \cdot 100 \cdot (1{,}01^{60} - 1) = 294{,}012.$$

Применяя формулу (3.14), найдем остаток:

$$L_5 = 545{,}02 - 294{,}012 = 251{,}008 \text{ тыс. руб.} = 251008 \text{ руб.}$$

7. *Замена одного займа другим.*

Господин $N$ в течение 5 лет должен один раз в квартал выплачивать 500 д.е. в счет погашения ссуды, взятой под 8% годовых. В связи с отъездом за границу через 2 года он попросил пересчитать величину ежеквартальной выплаты, чтобы успеть рассчитаться. Как изменится величина квартального платежа?

Решение

Величина ссуды

$$D = 500 \cdot \alpha(20; 8/4) = 500 \cdot 16{,}351 = 8175{,}5.$$

Поэтому искомый ежеквартальный платеж R должен удовлетворять уравнению

$$R \cdot \alpha(8;8/4) = 8175{,}5,$$

откуда

$$R = 81175{,}5 \,/\, 7{,}325 = 1116{,}1 \text{ д.е.}$$

8. *Реструктуризация кредиторской задолженности.*

В настоящее время обязательство заемщика перед кредитором составляет 1000 д.е. Финансовое состояние предприятия-должника не позволяет ему погасить эту задолженность по предусмотренной кредитным договором ставке в 8% даже с рассрочкой в 4 года. Вместе с тем при снижении ставки до 5% отсрочка в погашении кредита по схеме равных срочных уплат возможна и выплачиваемые предприятием средства не нарушают нормальных условий его функционирования. Кредитор согласился на выплаты по льготной ставке. Определить общие потери кредитора, т. е. величину предоставленной заемщику льготы.

Решение

Выплаты по льготной ставке вычислим из уравнения: $Y \cdot \alpha$ (4; 5) = 1000. По таблице коэффициентов приведения ренты находим: $\alpha$ (4; 5) =3,5459; отсюда $Y$ = 282,016. Применяя базовую ставку, определим финансово-эквивалентную величину долга, погашаемую заемщиком:

$$A = Y \cdot \alpha(4; 8) = 282{,}016 \cdot 3{,}3121 = 934{,}065.$$

Таким образом, субсидия кредитора заемщику составит:

$$V = 1000 - 934{,}065 \approx 65{,}935 \text{ ден. ед.}$$

В пересчете на конечную дату общие потери кредитора совпадают с наращенной суммой:

$$S = 65{,}935 \cdot (1 + 0{,}08)^4 = 89{,}704 \text{ ден. ед.}$$

Еще один способ решения основан на оценке ежегодных потерь кредитора. В случае равномерного погашения по ставке в 8%, срочная уплата будет равна:

$$Z = 1000 / \alpha(4; 8) = 1000 / 3{,}3121 = 3019232,$$

а ежегодные потери кредитора:

$$\Delta = Z - Y = 19{,}907.$$

Тогда предоставляемая заемщику льгота $\Lambda$ соответствует современной величине этого потока:

$$\Lambda = \Delta \cdot \alpha(4; 8) = 19{,}907 \cdot 3{,}3121 \approx 65{,}934,$$

что совпадает с полученным ранее ответом: $\Lambda = V \approx 65{,}93$.

**9.** *Ссуда с удержанием комиссионных.* При выдаче ссуды на 180 дней под 10% годовых по простой ставке кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов при условии, что год равен 360 дням?

Решение

Очевидно, что доходность рассматриваемой кредитной операции не зависит от размера ссуды. Поэтому номинальную сумму кредита можно принять за единицу. Тогда фактическая сумма, которую получит заемщик при удержании комиссионных, уменьшится до величины $S_0 = 1 - 0{,}005$. Для расчета эффективной ставки воспользуемся формулой (1.4), полагая в ней:

$$S_T = (1 + 0{,}1 \cdot 180/360) = 1{,}05,$$

$$S_0 = 0{,}995,\ T = 180/360 = 0{,}5:$$

$$r_{ef} = \left[\frac{1{,}05}{0{,}995}\right]^2 - 1 \approx 0{,}114 = 11{,}4\%.$$

**10.** *Авансовое удержание процентов.*

При выдаче кредита на 60 дней под 30% годовых по простой ставке кредитором в момент предоставления кредита были удержаны причитающиеся ему проценты. Номинальная величина кредита составляет 60000 руб. Каковы реальная сумма ссуды и доходность кредитной операции?

Решение

Процентный платеж за кредит $I = (60000 \cdot 60/360) \cdot 0{,}3 = 3000$. Из-за авансового удержания этих процентов реальная сумма предоставленного кредита составит величину $P = 60000 - 3000 = 57000$ руб. Погашаемая заемщиком в конце срока величина основного долга: $D = 60000$, поэтому доходность кредитной операции:

$$j = (3000/57000) \cdot 360/60 \approx 0{,}3158 = 31{,}58\%.$$

Примечание. Авансовому удержанию процентов в условиях задачи соответствует формула $P = D(1 - it/360)$, где $D = 60000$; $i = 0{,}3$; $t = 60$. Это означает, что назначаемая банком ставка $i$ может рассматриваться как учетная ставка простого процента.

**11.** *Сравнение коммерческих контрактов.* Судостроительная фирма предложила два варианта оплаты стоимости заказа 8 млн руб.:

а) 5% – при заключении контракта, 5% – при спуске судна на воду (через год), далее в течение 5 лет равные расходы по обслуживанию долга;

б) 5% – при заключении контракта, 10% основного долга и выплата процентов на остаток при спуске судна на воду (через год), затем погашение задолженности в течение 8 лет равными расходами.

Пусть процент за кредит одинаков в обоих случаях – 10% (годовая ставка сложного процента). Выберите предпочтительный для покупателя контракта (заемщика) вариант при условии, что ставка сравнения, на которую он ориентируется, равна 15%.

Решение

Для решения задачи необходимо определить потоки платежей в каждом варианте и сравнить их современные величины, вычисленные по ставке дисконтирования 15%. Легко понять, что с учетом авансовых выплат остаток долга на начало второго года составит:

$$L = D(1 + i) - Y_1(1 + i) - Y_2,$$

где $Y_1$, $Y_2$ – срочные уплаты.

Согласно условиям $D = 8$, $i = 0{,}1$; при этом $Y_1^{(1)} = Y_2^{(1)} = 8 \cdot 0{,}05 = 0{,}4$ для первого варианта и соответственно $Y_1^{(2)} = 8 \cdot 0{,}05 = 0{,}4$; $Y_2^{(2)} = 8 \cdot 0{,}1 + (8 - 0{,}4)\,0{,}1 = 1{,}56$ для второго. Подставляя эти значения в формулу задолженности $L$, найдем суммы интересующих нас остатков по каждому варианту:

$$L(1) = 8 \cdot 1{,}1 - 0{,}4 \cdot 1{,}1 - 0{,}4 = 7{,}96 \text{ млн руб.};$$
$$L(2) = 8 \cdot 1{,}1 - 0{,}4 \cdot 1{,}1 - 1{,}56 = 6{,}8 \text{ млн руб.}$$

Расходы на погашение задолженности $L$ найдем по формуле определения равных срочных уплат (3.6):

$$Y = L/\alpha(n, i).$$

Отсюда

$$Y^{(1)} = L(1)/\,\alpha(5,10) = 7{,}96/3{,}7908 = 2{,}0998,\ Y^{(2)} = L(2)/\,\alpha(8,10) = $$
$$= 6{,}8/5{,}3349 = 1{,}2746.$$

Теперь нужно сравнить следующие финансовые потоки по каждому из вариантов:

а) (0; 0,4), (1;0,4), (2; 2,0998), ..., (6; 2,0998);

б) (0; 0,4), (1; 1,56), (2; 1,2746), ..., (9; 1,2746).

В этих вариантах замыкающие потоки, состоящие из равных выплат, имеют при ставке 15% следующие текущие стоимости:

$$TC(1) = 2{,}0998 \cdot (\alpha(5{,}15) = 3{,}3522) \cdot 1/1{,}15 = 6{,}1208;$$

$$TC(2) = 1{,}2746 \cdot (\ \alpha(8{,}15) = 4{,}4873)) \cdot 1/1{,}15 = 4{,}9735.$$

Прибавляя эти оценки к результату приведения двух первых уплат, найдем значения современных величин потока выплат для каждого варианта погашения кредита:

$$A(1) = 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 1/1{,}15 + 6{,}1208 \approx 6{,}8686;$$

$$A(2) = 0{,}4 + 1{,}56 \cdot 1/1{,}15 + 4{,}9735 = 6{,}73.$$

Таким образом, $A(2) < A(1)$ и, следовательно, для покупателя контракта выгоднее второй вариант. Выбрав его, он сэкономит сумму

$$\Delta = A(1) - \mathrm{A}(2) = 0{,}1386 = 138600 \text{ руб.}$$

и в перспективе может получить выигрыш:

$$V = 138600 \cdot (1 + 0{,}15)^9 = 138600 \cdot 3{,}5179 \approx 487581 \text{ руб.}$$

## 3.3. Задачи для самостоятельного решения

### Расчетные задачи

**1.** По условиям контракта доходность кредита должна составлять 24% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов:

а) ежемесячно;

б) поквартально?

**2.** Контракт между фирмой *A* и банком *B* предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит с ежегодными платежами в размере 1 млн руб. в начале каждого года под ставку 10% годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 1 млн 300 тыс. руб.; 1,5 и 2 млн руб. в конце 3-го, 4-го и 5-го годов. Приемлема ли эта операция для банка и если да, то каков его выигрыш?

**3.** Предполагается, что в фонд погашения долга Д = 10 000 долл. средства поступают в конце каждого года в течение 5 лет. На средства погасительного фонда начисляются проценты по ставке $i = 10\%$, ставка по кредиту $j = 9,5\%$. Предусматривается, что платежи каждый раз увеличиваются на 500 долл. Необходимо разработать план формирования фонда погашения.

**4.** Пусть долг, равный 100 тыс. руб., необходимо погасить равными суммами за 5 лет, платежи в конце года. За заем выплачиваются проценты по ставке 5%. Составить план погашения долга.

**5.** Заем 200 000 руб. взят на 10 лет под 8% годовых. Погашаться будет начиная с конца 6-го года ежегодными равными выплатами. Найти размер этой выплаты.

**6.** Ссуда в 30 500 руб. выдана в 2004 г. 1 января по сложной ставке 10% годовых. Заемщик обязан вернуть долг, выплачивая 8000, 16500 и 6500 руб. последовательно 15.03, 07.07 и 21.10 того же года. Кто при такой схеме погашения кредита оказывается в проигрыше: кредитор или должник, и насколько?

**7.** По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн руб. оплачивается в рассрочку ежеквартально в течение 5 лет с начислением сложных процентов на оставшуюся сумму долга по годовой процентной ставке 0,12. Определить величины равных платежей, если начало оплаты продукции:

а) перенесено на полгода после подписания контракта;

б) отложено на 2 года;

в) в п. «а» изменяется число платежей в году, а именно они проводятся каждые полгода;

г) в п. «б» отсрочка сопровождается сокращением срока оплат до 4 лет.

**8.** Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д. е. в течение 2 лет. Из-за изменения ситуации в стране ставка снизилась до 8% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

**9.** Выдана ссуда в 120 тыс. руб. на 1,5 года под 24% годовых. Должник обязан в конце каждого 2-го месяца выплачивать равными долями долг вместе с процентами (имеются в виду проценты в 1/6 от годовых). Какова сумма разового платежа?

**10.** Ссуда в 10 тыс. долл. выдана под 12% годовых и требует ежемесячной оплаты по 180 долл. и выплаты остатка долга к концу срока в 5 лет. Каков остаток долга?

**11.** Долг в сумме 100 тыс. руб. выдан под 10% годовых на 5 лет. Для его погашения единовременным платежом одновременно с получением ссуды создается фонд. На размещаемые в нем средства начисляются проценты (11% годовых), причем в погасительный фонд ежегодно вносятся равные суммы. Найти срочные расходы должника на протяжении 5 лет для двух вариантов погашения процентов:

а) ежегодно;

б) разовым платежом в конце срока.

**12.** При выдаче ссуды на 180 дней под 10% годовых по простой ставке кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов при условии, что год равен 360 дням?

**13.** Кредит в 20 млн руб. выдан на 2 года под ставку 10%. Согласно договору все проценты должны быть выплачены одной суммой в начале срока. Определить:

а) план погашения с минимальным числом выплат;

б) может ли срочная уплата второго года равняться 10 млн руб.?

**14.** Имеются два варианта получения годового кредита в 90 тыс. руб., возвращаемого одним платежом в конце года:

а) при учетной ставке 10%;

б) при процентной ставке 10%.

Определить платежи по каждому варианту и лучший для заемщика вариант.

**15.** При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов? В пределах года начисление идет по простому проценту, кредитному году соответствует временная база в 360 дней.

**16.** Покупатель приобрел телевизор стоимостью 3,6 тыс. руб. При этом он сразу уплатил 25% стоимости, а на оставшуюся сумму получил кредит на 6 месяцев под 20% годовых по простой ставке. Кредит погашается ежемесячными платежами. Требуется:

а) составить план погашения с помощью правила числа 78;

б) составить план погашения равными суммами по основному долгу и выплатой процентов, начисляемых на его оставшуюся часть;

в) определить, какая из двух схем предпочтительнее для должника и чему равна его ежемесячные переплаты по невыгодной схеме.

**17.** Потребительский кредит выдан на 3 года на сумму 10 тыс. долл. по ставке 10% годовых. Определить доходность этой ссуды в виде годовой ставки сложного процента.

**18.** ЗАО « Белый парус» 2 октября 2002 г. реализовало товар в кредит по простой ставке 17,5% годовых на сумму 3,24 млн руб. с оформлением векселя на срок погашения 12 января 2003 г. Через 60 дней векселедержатель обратился в банк для проведения операции по учету векселя. Банк предложил учесть вексель по простой дисконтной ставке равной 21,25%. Определить:

а) сумму, полученную фирмой за проданный товар;

б) сколько средств заработает банк в результате сделки с векселедержателем;

в) чему равна доходность операции учета в виде простой годовой ставки.

## Аналитические задачи

**1.** В результате освоения новой технологии ожидаемый руководством прирост прибыли предприятия в ходе его дальнейшей деятельности составляет величину $\Delta$. Процесс внедрения занимает один год и финансируется с привлечением заемных по ставке $i$ средств объемом $D$. Определить срок возврата кредита, если в качестве источника его погашения оговаривается только величина $\Delta$.

**2.** Ипотечная ссуда размером $D$ выдана на $T$ лет под годовую ставку простых процентов $r$ и погашается равными ежемесячными выплатами. Их сумма равняется годовой выплате, которая состоит из погашения основного долга и процентов. Погашение основного долга производится равными годовыми суммами. Начисленные при этом условии проценты прибавляются к величине ссуды, и сумма всех срочных годовых уплат должна быть равна этой величине. Получить выражение для ежемесячных платежей заемщика для схемы с постоянными годовыми платежами.

**3.** Ипотечная ссуда размером $D$ выдана на срок $T$ лет под годовую ставку сложного процента $i$. Составить график ежемесячных погасительных платежей, удовлетворяющий следующим ограничениям. Первые $m$ месяцев расходы должника (в конце месяца) растут с постоянным темпом $g$, достигают наибольшего значения, а затем в оставшиеся до погашения $n$ месяцев не меняются, т. е. постоянны ($m + n = 12T$).

**4.** Условия займа $D$ могут предусматривать два периода его погашения: льготный, в течение которого выплаты в счет погашения долга не производятся, и следующий за ним период с отсутствием этой льготы. Пусть долг $D$ необходимо погасить в течение $n$ лет, платежи в конце года, а установленная кредитная ставка равна $r$. Льготный период имеет продолжительность $L$, а затем и вплоть до окончания кредитного срока погашение производится по схеме равных выплат по основному долгу. Получить формулы расчета плана погашения для двух вариантов льготы:

а) в льготном периоде срочные уплаты состоят из одних процентных платежей;

б) на весь срок льготного периода заемщик освобождается от каких бы то ни было выплат по кредиту.

**5.** Кредит в сумме $D$ выдан под ставку $r$, которая ниже, чем доминирующая на денежном рынке ставка $j$. Согласно договору этот кредит должен быть погашен за $n$ лет равными срочными уплатами с регулярной выплатой льготного процента $r$. Определить абсолютные и относительные потери кредитора.

**6.** Ссуда $D$ выдана на срок $n$ (в годах). При ее выдаче удерживаются комиссионные $G$ в размере $g$ (в виде десятичной дроби) от суммы займа. Сделка предусматривает начисление процентов по ставке $i$. Какова доходность этой операции в виде годовой ставки сложных процентов при условии, что ссуда выдается по ставке:

а) простого процента;

б) сложного процента?

**7.** Рассматриваются два варианта покупки одного и того же товара на условиях коммерческого кредита с погашением по схеме равных срочных уплат (табл. 3.4).

Таблица 3.4

| Вариант | Цена (размер кредита) | Процент по кредиту | Срок погашения |
|---|---|---|---|
| 1 | $P_1$ | $i_1$ | $n_1$ |
| 2 | $P_2$ | $i_2$ | $n_2$ |

Покупатель контракта выбирает тот вариант, у которого современная величина расходов на обслуживание долга будет меньше. Пусть $q$ – ставка сравнения, по которой он дисконтирует погашающие задолженность платежи. Требуется:

а) показать, что отношение сравниваемых современных величин можно представить в виде произведения следующих сомножителей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{\alpha(n_2,i_2)}{\alpha(n_1,i_1)}\cdot\frac{1-(1+q)^{-n_1}}{1-(1+q)^{-n_2}},$$

Содержание первого множителя очевидно, второй характеризует влияние ставок процентов по кредиту и их сроков ($\alpha(n, i)$ – коэффициент приведения простой годовой ренты), третий – влияние принятой для сравнения ставки $q$;

б) получить уравнение относительно срочности кредита $n$ (одинаковой по каждому варианту), при которой контракты будут равно выгодны для покупателя.

**8.** Ссуда в размере $P$ выдана на $n$ лет под простые проценты по годовой ставке $i$. При выдаче ссуды были удержаны комиссионные в размере $g\%$ от суммы кредита. Какова доходность операции в виде годовой ставки сложных процентов?

**9.** Кредит в сумме $P$ предоставлен сроком на $T$ лет под переменную ставку сложного процента $i_1, i_2, ..., i_T$. Доказать, что поток срочных уплат $Y_t = i_tP$, $t = 1, 2, .., T–1$; $Y_T = i_TP + P$ финансово эквивалентен правилу разового погашения и поэтому его можно использовать как один из способов обслуживания задолженности в случае переменных процентов.

## Ситуационные задачи

**1.** Банк предоставил господину $N$ кредит с 4 марта по 16 июля того же года под 30% годовых по простой ставке. Номинальная величина кредита составляет 45 тыс. руб. Затраты банка по обслуживанию долга в размере 1% от суммы кредита были удержаны вместе с начисленными процентами в момент выдачи кредита. Господин $N$ 16 июля выплатил банку только 25 тыс. руб. Банк согласился на продление погашения кредита до 16 августа под 36% годовых с начислением процентов за период отсрочки в конце срока. Какова реальная величина кредита, полученного господином $N$, и какую сумму он должен выплатить банку 16 августа?

**2.** Господин $N$ намеревается купить с помощью ипотечного кредита однокомнатную квартиру стоимостью 30 000 долл. Согласно условиям договора, для интересующего его варианта начальный взнос составляет 10000 долл., а затем по окончании первого месяца и в течение 7,5 лет он должен будет выплачивать по 350 долл. ежемесячно. Соискателя квартиры волнует, насколько соответствуют эти выплаты ставке ипотечного кредита 12%. Не завышены ли они? А как думаете вы?

**3.** На покупку дачного домика взят потребительский кредит 300 тыс. руб. на 8 лет под 8 простых процентов. Его нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Найти:

а) размер выплаты;

б) чему равна годовая ставка сложного процента, под которую выдан кредит.

**4.** Для занятия предпринимательской деятельностью господину Иванову требуется кредит в размере 300 тыс. руб. Возможности возврата этой ссуды, основанные на ожидаемой прибыли, он оценивает допустимыми для него ежегодными выплатами по 70 тыс. руб. каждая. Банк кредитует под ставку 5% годовых и согласен на предлагаемый размер срочной уплаты в счет погашения кредита. Составить план погашения долга.

**5.** Фермер купил в кредит систему для очистки воды за 20 тыс. долл. Он обязан погасить этот кредит ежемесячными платежами в течение года, выплачивая при этом проценты за долг по сложной ставке в 6%. Хозяин магазина продает этот контракт финансовой компании, которая, желая получить доход по ставке 12%, добивается соответствующего изменения стоимости контракта. Сколько должна заплатить компания хозяину магазина?

**6.** Домостроительная фирма продала дом за 12 млн руб., предоставив покупателю потребительский кредит на 3 года по простой годовой ставке 10%. Согласно договору этот кредит должен быть погашен равными ежегодными выплатами. Определить доходность этой операции для домостроительной фирмы.

**7.** Фирма желает построить здание под офис. Она получила предложение от двух строительных организаций построить подходящее для нее здание. Первое здание стоит 20 млн руб., строители требуют два авансовых платежа по 5 млн руб.: первый — в момент заключения контракта, второй — через 2 года после этого. Готовое здание сдается после второго авансового платежа, и на оставшуюся сумму предоставляется кредит на 3 года под 6% годовых, который должен погашаться равными ежегодными платежами. Второе здание стоит 22 млн руб. Строители желают получить три авансовых платежа по 2 млн руб.: первый — в момент заключения контракта, второй – через год, третий – еще через год. Готовое здание сдается после третьего авансового платежа и на оставшуюся сумму строители предоставляют фирме кредит на 5 лет под 4% годовых, который должен погашаться равными ежегодными срочными уплатами. Какой контракт выгоднее для фирмы, если свои альтернативные издержки она оценивает ставкой $i = 10\%$?

**8.** Зажиточный Иванов решил поддержать не слишком богатого приятеля и предложил ему денег взаймы: «Вот возьми, здесь – сто двадцать тысяч. Встанешь на ноги – отдашь, и никаких процентов». Дотошный Петров уточнил: «До окончания аспирантуры еще два года, а после я тебе все верну: каждый месяц по десять тысяч».

Найти абсолютный $W$ и относительный $w$ грант-элемент предоставленного займа, учитывая, что добряк Иванов отказался от доступной ему возможности кредитования под ставку 12% годовых.

**9.** Начиная с текущего года Урюпинский университет в правилах приема предусмотрел возможность обучения в кредит. Так, для абитуриентов отделения математики, недобравших одного проходного бала, этот кредит равен стоимости пятилетнего обучения на платной основе и составляет 25 тыс. долл. Руководство университета, не сомневаясь в кредитоспособности своих выпускников, установило следующие правила займа: кредит выдается на 10 лет под 10% годовых; первые 5 лет, пока студент учится, он ничего не платит, в оставшуюся пятилетку ссуда погашается в конце каждого года равными взносами.

Допустим, что заемщик предполагает использовать на эти нужды половину годовой зарплаты, которую он будет получать по окончанию университета. На какой минимально возможный для себя уровень среднемесячной зарплаты он надеется?

**10.** Информируя о своей деятельности на рынке потребительского кредитования, банк «Товары для дома» дает следующий «рекламный» пример:

• микроволновая печь, которая вам понравилась, стоит 5500 руб.;

• первый взнос (20%) при покупке в кредит составит всего 1100 руб.;

• допустим, вы готовы погасить оставшуюся часть стоимости за 16 месяцев. В этом случае ваш ежемесячный платеж составит 422 руб. 40 коп.;

• таким образом, вы переплачиваете за товар около 4 руб. 90 коп. в день;

• вы можете выбрать другую, более удобную для вас схему погашения кредита.

Для расчетов ежемесячного платежа (размер кредита · коэффициент платежа) используйте табл. 3.5.

Таблица 3.5

| Срок кредита, мес. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| Коэффициент ежемесячных платежей | | | | | |
| 0,285 | 0,159 | 0,117 | 0,096 | 0,084 | 0,075 |

Требуется:

а) определить, зависит ли доходность ссудной операции от величины первого взноса;

б) найти номинальную ставку $i$ потребительского кредита на микроволновую печь и годовую доходность $j$ этой финансовой операции для банка;

в) определить, за сколько месяцев можно накопить требуемую сумму в 5500 руб. с помощью пополняемого депозита, если ваш начальный вклад – 1100 руб., дополнительные ежемесячные взносы – 442,4 руб., проценты начисляются ежеквартально исходя из годовой ставки 12%;

г) сравнить табличные варианты по номинальной и действительной ставке.

## Тесты

**1.** Как будет в годовых бухгалтерских балансах отмечаться задолженность предприятия по кредиту в объеме $D$, выданному под ставку $i$ на срок $T$ при использовании схемы равных процентных выплат:

1) растет;

2) убывает;

3) сохраняет постоянное значение $D$ для первых (T – 1) балансов;

4) задолженность в балансе с номером $T$ равна нулю.

**2.** Рассматриваются следующие схемы обслуживания долгосрочной задолженности:

а) равными срочными уплатами;

б) разовое погашение в конце срока;

в) равными процентными выплатами.

Расположить в порядке убывания остатка задолженности на любую промежуточную дату:

1) б, в, а;

2) а, б, в;

3) а, в, б;

4) в, а, б.

**3.** Кредитная ставка равна 14%.Определить период времени, по истечении которого процентные деньги сравняются с величиной основного долга:

1) 10 лет;

2) 5 лет;

3) всегда будут меньше;

4) имеющейся информации недостаточно.

**4.** Компания «Аромат-престиж» нуждается в краткосрочном (до года) кредите в 10 млн руб. для создания запасов к Рождеству. Банк А предлагает кредит под 8% годовых с удержанием комиссионных в размере 5% суммы кредита. Банк Б предлагает ссуду под 10% без дополнительных условий. Какой банк предлагает лучшие условия? При каком размере комиссионных предлагаемые условия будут равно выгодны?

1) А;

2) Б;

3) 1,82%;

4) 2%;

5) 6,15%.

**5.** Кредит $L_1$ = 10000 долл. выдан по сложной ставке 10% годовых на 3 года и погашается в рассрочку ежегодными платежами. Первые две выплаты в счет его погашения равны 800 и 1200 долл. Обозначим задолженность на начало 2-го и 3-го годов, оставшуюся после очередного взноса, через $L_2$ и $L_3$. Расположить величины $L_1$, $L_2$, $L_3$ в порядке убывания:

1) $L_1$, $L_2$, $L_3$;

2) $L_3$, $L_2$, $L_1$;

3) $L_2$, $L_3$, $L_1$;

4) $L_3$, $L_1$, $L_2$.

**6.** У господина $N$ имеется 4 возможных варианта заимствования необходимой ему суммы под 8% годовых на 180 дней с момента подписания договора:

1) по простой ставке начисления процентов;

2) под ставку сложного процента;

3) при условии, что применяется простая учетная ставка;

4) по сложной учебной ставке.

По всем рассматриваемым вариантам принята одна и та же временная база, равная 360 дням. Какой вариант вы бы ему рекомендовали?

**7.** Банк учитывает вексель за $n$ месяцев до срока его оплаты по простой учетной ставке годового процента $d$. Как меняется доходность этой операции, измеряемая годовой ставкой сложных процентов, с увеличением срока от момента учета до момента оплаты векселя:

1) изменение доходности в зависимости от $n$ носит немонотонный характер;

2) растет;

3) убывает;

4) может расти, а может и убывать в зависимости от числового значения $d$.

**8.** Рассматриваются два способа льготной реструктуризации кредиторской задолженности. По первому варианту заемщику прощаются проценты, по второму – основной долг. Какая из схем выгоднее для кредитора, если период отсрочки равен 4 годам, а ставка по кредиту – 20%.

1) вторая;

2) первая;

3) выгодность схемы зависит от величины задолженности.

**9.** Стиральная машина стоит 7900 руб. При покупке ее в кредит на 4 месяца выплачивается первый взнос, а оставшаяся сумма погашается ежемесячными платежами, составляющими 28% от размера кредита. Определить номинальную годовую ставку потребительского кредита на стиральную машину:

1) 36%;

2) 56%;

3) для ответа на вопрос необходимо знать величину первого взноса;

4) все ответы неверны.

**10.** При выдаче ссуды на 180 дней под 10% годовых по простой ставке кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов при условии, что год равен 360 дням:

1) 11,05%;
2) 11,36%;
3) 10,25%;
4) все ответы неверны.

**11.** При выдаче кредита в 6000 руб. на 60 дней под 30% годовых по простой ставке кредитором в момент его предоставления были удержаны проценты. Какова доходность кредитной операции, измеряемая простыми процентами?

1) 32,46%;
2) 30,95%;
3) 31,58%;
4) иной ответ.

**12.** Кредит в 20 млн руб. выдан на 2 года под ставку 10%. Согласно договору все проценты должны быть выплачены одной суммой в начале срока. Исходя из этого финансовый менеджер предложил руководству четыре варианта погашения кредита. В каких вариантах или варианте он ошибся?

1) (3,471074; 10; 9);
2) (4,2; 0; 19,118);
3) (3,471074; 0; 20);
4) (4,2; 15; 2,618).

**13.** Долг, равный 300 тыс. руб., необходимо погасить за 3 года. За заем выплачиваются проценты по ставке 10% годовых. Расположить в порядке возрастания среднего срока срочной уплаты (дюрации) следующие схемы погашения:

а) равными частями долга;
б) разовое погашение в конце срока;
в) равными процентными выплатами;

1) а, б, в;
2) а,в, б;
3) в, а, б;
4) в, б, а.

**14.** Пусть кредит, равный 4 млн 840 тыс. руб., необходимо погасить равными процентными выплатами за 2 года. Предприятию, решившему создать фонд погашения основного долга, достаточно выделить на эти цели в настоящее время 4 млн. руб., однако отвлечение одновременно такой суммы из хозяйственного оборота нецелесообразно. Предпочтение отдается варианту внесения двух равных платежей (в конце 1-го и 2-го годов), обеспечивающему создание такого же фонда. Определить размер требуемого платежа:

1) 2125672 руб.;

2) 2213456 руб.;

3) 2304762 руб.;

4) в исходных данных не хватает числового значения ставки начисления процентов на размещаемые в фонде средства.

**15.** Кредит в 1000 д.е. выдан под сложную ставку 20% годовых сроком на 3 года. В потоке погасительных платежей известны первые две срочные уплаты: $Y_1 = 100$, $Y_2 = 400$. Исходя из требования финансовой эквивалентности, определить третью срочную уплату $Y_3$. Выделить в каждой срочной уплате часть, которая идет на возврат основного долга, и процентную выплату, для чего использовать правило: «погашение долга произвольными суммами с начислением процентов на остаток». Чему равны проценты, выплаченные по кредиту, при такой схеме погашения?

1) 728;

2) 604;

3) 736;

4) все ответы неверны.

## Ответы и решения

### Расчетные задачи

**1.** а) $j = 0{,}21705$; б) $j = 0{,}22100$. При решении применить определение эффективной ставки (1.4) или формулу (1.5): $(1 + j/m)^m = 1{,}24$; $m = 12$ (а) и $m = 4$ (б). **2.** Приемлема, выигрыш банка можно оценить через превышение на конец 5-го года наращенной суммы погашающих платежей ($S_5$) по сравнению с наращенной суммой ссужаемых средств ($C_5$): $V = S_5 - C_5 = 5{,}223 - 4{,}40561 = 0{,}81739$ млн руб. = = 817390 руб.

**3.** Решению соответствует табл. 3.6.

Таблица 3.6

| Год | Выплата процентов | Взносы в фонд | Расходы по займу | Накопление на конец года |
|---|---|---|---|---|
| 1-й | 950 | 732,87 | 1682,87 | 732,87 |
| 2-й | 950 | 1232,87 | 2182,87 | 2039,03 |
| 3-й | 950 | 1732,87 | 2682,87 | 3975,80 |
| 4-й | 950 | 2232,87 | 3182,87 | 6606,25 |
| 5-й | 950 | 2732,87 | 3682,87 | 9999,75 |

**4.** Решению соответствует табл. 3.7.

Таблица 3.7

| Год | Остаток долга на начало года | Сумма погашения долга | Выплата процентов | Срочная уплата |
|---|---|---|---|---|
| 1-й | 100 | 20 | 5 | 25 |
| 2-й | 80 | 20 | 4 | 24 |
| 3-й | 60 | 20 | 3 | 23 |
| 4-й | 40 | 20 | 2 | 22 |
| 5-й | 20 | 20 | 1 | 21 |

**5.** $$Y\cdot\alpha(5;8)\cdot\gamma(5;8)=Y(1-1{,}08^{-5})\cdot\frac{1{,}08^{-5}}{0{,}08}=Y\cdot 3{,}9927\cdot 0{,}6806=200000,$$

$$Y\approx\frac{200000}{2{,}7174}\approx 73600 \text{ руб.}$$

**6.** Согласно договору выплаты должны производиться через 74, 188 и 294 дня с даты выдачи кредита. Современная величина потока этих выплат: $PV \approx 29576{,}12$, что меньше величины долга $D = 30500$. Таким образом, кредитор недополучит сумму $S = 923{,}88$ руб.

Примечание. Расчет порядкового номера дней по каждой выплате удобно проводить в Excel. Например, по первой дате в ячейку Excel следует ввести запись: = «15.03.04» – «01.01.04 и нажать клавишу **Enter**.

**7.** а) $Y \cdot \alpha(19;3) = 2 \cdot (1 + 0{,}03)$; $Y = 2{,}06/14{,}3238 \approx 0{,}14382$ млн руб. $\approx$ $\approx 143820$ руб; б) $Y \cdot \alpha\ (13;3) = 2 \cdot (1 + 0{,}03)^7$; $Y = 2 \cdot 1{,}22987/10{,}635 =$ $= 0{,}23129$ млн руб $= 231290$ руб.; в) $Y \cdot \alpha\ (10;\ 6) = 2$; $Y = \dfrac{2}{7{,}36008} =$ $= 0{,}27174$ млн руб. $= 271740$ руб.;

г) $Y \cdot \alpha\ (9;\ 3) = 2(1 + 0{,}03)^7$; $Y = \dfrac{2{,}4597}{7{,}7861} =$ 0,31591 млн руб. $\approx$ $\approx 315910$ руб. В расчетах предполагалось, что в течение года число начислений процентов совпадает с числом платежей. Близкие результаты получатся, если считать, что проценты для всех рассматриваемых вариантов начисляются один раз в году, т. е. использовать формулу (2.1), полагая $m = 1$.

**8.** Для определения размера выплаты имеем уравнение $500 \cdot \alpha\ (8;\ 4) = Y \cdot \alpha(8;2)$, отвечающее балансу текущих стоимостей срочных аннуитетов постнумерандо. Откуда $Y = 459{,}5$ д.е.

**9.** $Y = 120\ /\ \alpha(9;4) = 120/7{,}435 \approx 16{,}14$ тыс. руб. $= 16140$ руб.

**10.** Остаток долга: $10 \cdot \lambda(5;\ 12) - 180 \cdot s(60;\ 1) = 10000 \cdot 1{,}7623 -$ $- 180 \cdot 81{,}6697 = 17623 - 14700{,}546 = 2922{,}454$ долл.

**11.** а) 26057 руб.; б) 25860 тыс. руб.

**12.** $\left(\dfrac{1{,}05}{0{,}995}\right)^2 - 1 = 0{,}1136 = 11{,}36\%.$

**13.** а) 3,4711 – выплата процентов в начале срока; 20 – погашение основного долга в конце второго года; б) может.

**14.** Решению соответствует табл. 3.8.

Таблица 3.8

| Сумма к получению | Сумма на погашение | Лучший вариант |
|---|---|---|
| 90 | $\dfrac{90}{0{,}9} = 100$ | |
| 90 | $90 \cdot 1{,}1 = 99$ | + |

**15.** $r_{ef} = \left(\dfrac{1{,}04}{0{,}995}\right)^2 - 1 \approx 0{,}0925 = 9{,}25\%.$

**16.** а) план погашения при первом способе (табл. 3.9).

Таблица 3.9

| Месяц | Остаток основного долга на начало месяца, руб. | Величина погасительного платежа, руб. | Доля погашения общей величины начисленных процентов | Погашение общей величины начисленных процентов, руб. | Погашение основного долга, руб. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-й | 2700 | 495 | 6/21 | 77 | 418 |
| 2-й | 2282 | 495 | 5/21 | 64 | 431 |
| 3-й | 1851 | 495 | 4/21 | 51 | 444 |
| 4-й | 1407 | 495 | 3/21 | 39 | 456 |
| 5-й | 951 | 495 | 2/21 | 26 | 469 |
| 6-й | 482 | 495 | 1/21 | 13 | 482 |
| Σ | | 2970 | | 270 | 2700 |

б) план погашения при втором способе (табл. 3.10).

Таблица 3.10

| Месяц | Остаток основного долга на начало месяца, руб. | Процентный платеж, руб. | Ежемесячная выплата основного долга, руб. | Величина погасительного платежа, руб. |
|---|---|---|---|---|
| 1-й | 2700 | 45 | 450 | 495 |
| 2-й | 2250 | 37,5 | 450 | 487,5 |
| 3-й | 1800 | 30 | 450 | 480 |
| 4-й | 1350 | 22,5 | 450 | 472,5 |
| 5-й | 900 | 15 | 450 | 465 |
| 6-й | 450 | 7,5 | 450 | 457,5 |
| Σ | | 157,5 | 2700 | 2857,5 |

в) второй способ предпочтительнее. Ежемесячные переплаты по первому способу составят:

$$\Delta_1 = 0;\ \Delta_2 = 7{,}5;\ \Delta_3 = 15;\ \Delta_4 = 22{,}5;\ \Delta_5 = 30;\ \Delta_6 = 37{,}5.$$

**17.** 14,36%.

**18.** а) определим будущую стоимость векселя к погашению:

$$FV = 3240000 \cdot (1 + 0{,}175 \cdot \frac{102}{360}) = 3400650 \text{ руб.}$$

При учете векселя банк выплатит фирме (векселедержателю) сумму:

$$P_0 = 3400650(1 - 0{,}2125 \cdot 42/360) = 331642 \text{ руб.};$$

б) при погашении векселя банк реализует дисконт:

$$\text{П} = 3400650 - 331642 = 84308 \text{ руб.};$$

в) 21,79%.

Примечание. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням, а число дней в периоде обычно берется точным.

### Аналитические задачи

**1.** Воспользуемся условием финансовой эквивалентности наращенных сумм долга и выплат по нему:

$$D(1+i)^n = \Delta \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Откуда $n = -\dfrac{\ln(1 - Di/\Delta)}{\ln(1+i)}$.

**2.** Начисленные за срок $T$ простые проценты:

$$I = Dr + (D - D/T)r + \ldots + (D - (T - 1)D/T)r = Dr(T + 1)/2.$$

Годовая выплата состоит из погашения основного долга и процентов:

$$\text{P} = (D/T)(1 + r(T + 1)/2).$$

Таким образом, величина ежемесячного платежа равна:

$$p = \frac{D}{12T}\left(1 + \frac{T+1}{2} \cdot r\right).$$

**3.** Согласно условию ежемесячный платеж $Y_t = Y_1 g^{t-1}$, $t = 1, \ldots, m$; $Y_t = Y_1 g^{m-1}$, $t = m + 1, \ldots, m + n$, и график выплат определяется величиной первого взноса. Для отыскания этой величины следует приравнять сумму современных величин возрастающей ($A_1$) и постоянной ($A_2$) части потока $\{Y_t\}$ размеру долга $D$.

$$A_1 = \frac{Y_1\gamma(1-(g\gamma)^m)}{(1-g\gamma)}, \quad A_2 = \frac{Y_1 g^{m-1}(1-\gamma^n)}{i/12}\gamma^m =$$

$$= \frac{Y_1 g^{m-1}\gamma^{m+1}(1-\gamma^n)}{(1-\gamma)}, \quad \gamma = \frac{1}{(1+i/12)}.$$

Из уравнения $A_1(Y_1) + A_2(Y_1) = D$, найдем $Y_1 = D$:

$$\left[\gamma \cdot \frac{(1-(g\gamma)^m}{(1-g\gamma)} + g^{m-1}\gamma^{m+1} \cdot \frac{(1-\gamma^n)}{(1-\gamma)}\right].$$

**4.** а) $Y_t = D \cdot r,\ t = 1, \ldots, L;\quad Y_{L+t} = (D - \frac{D}{n-L} \cdot (t-1))r + \frac{D}{n-L},$

$t = 1,\ \ldots,\ n - L;$

б) $\quad Y_t = 0,\ t = 1, \ldots, L;\quad Y_{L+t} = (\hat{D} - \frac{\hat{D}}{n-L} \cdot (t-1))r + \frac{\hat{D}}{n-L},$

$\hat{D} = D(1+r)^L,\ t = 1,\ \ldots,\ n - L.$

**5.** Срочная уплата: $Y_t = Y = D / \alpha(n; r)$; $t \leq n$. Современная величина всех платежей по займу: $A = Y \cdot \alpha(n; j) \leq D$. Таким образом, потери кредитора можно оценить превышением: $W = D(1 - \alpha(n; j)/\alpha(n; r))$, или относительной величиной: $w = 1 - \alpha(n; j)/\ \alpha(n; r)$.

Примечание. Величины $W$, $w$ называются абсолютным и соответственно относительным грант-элементом.

**6.** $\quad r_{ef} = \left(\frac{1+ni}{1-g}\right)^{1/n} - 1;$ б) $r_{ef} = \frac{1+i}{(1-g)^{1/n}} - 1.$

**7.** а) При равномерном погашении кредита срочная уплата $Y = P/\alpha(n, i)$. Современная величина потока таких уплат $A = Y \cdot (1 - (1 + q)^{-n})/q$. Записывая эти формулы для каждого варианта, получим требуемое разложение на множители отношения $A_1/A_2$; б) условие равной выгодности сводится к равенству современных величин $A_1$, $A_2$, что дает следующее уравнение относительно искомого значения $n$:

$$\frac{1-(1+i_1)^{-n}}{1-(1+i_2)^{-n}} = \frac{i_1}{i_2} \cdot \frac{P_1}{P_2}.$$

**8.** $r_{ef} = \sqrt[n]{\frac{1+ni}{1-g}} - 1,\ g = \frac{g\%}{100}$ .

**9.** Для доказательства можно воспользоваться методом математической индукции.

**Ситуационные задачи**

**1.** 39525; 20620. Срочность кредита равна числу дней между 4 марта и 16 июля (134 дня). Фактически полученная сумма

$D = 45000(1 - 0{,}3 \cdot 134/360 - 0{,}01) = 39525$ руб. На 16 июля остаток долга составит:

$D_{ост} = 45000 - 25000 = 2000$, а начисленные за 31 просроченный день (с 16 июля по 16 августа) проценты составят:

$$I = \frac{2000 \cdot 0{,}36 \cdot 31}{360} = 620 \text{ руб.}$$

Таким образом, господин $N$ 16 августа должен будет выплатить банку сумму:

$S = 20000 + 620 = 20620$ руб.

**2.** Завышены. Текущая стоимость потока выплат:

$TC = 350 \cdot \alpha(90;\ 1) \approx 350 \cdot 59{,}16088 \approx 20706$ долл.

Таким образом, переплата господина $N$ — 706 долл.

**3.** а) Ежеквартальная выплата равна $300\ 000 \cdot 1{,}64/32 = 15375$; б) для искомой ставки $j$ имеем уравнение:

$15375 \cdot \alpha(32; j/4) = 300000.$

Откуда $\alpha(32;\ j(4) = \frac{(1-(1+j/4)^{-32})}{j/4} \approx 19{,}51.$

Применяя встроенную в Excel функцию для расчета внутренней ставки, получаем: $j/4 \approx 3{,}33\%$, т. е. $j \approx 13{,}3\%$. Итак, кредит выдан фактически под 13,3% годовых сложных процентов.

**4.** Срочность $n$ кредита найдем из уравнения: $70 \cdot \alpha(n;\ 5) = 300$. Для отыскания его корня можно воспользоваться функцией Excel для расчета числа периодов. В результате получим значение $n = 4{,}94284$. На практике это означает, что первые 4 года срочная уплата равна 70 тыс. руб., а в последнем году она будет меньше, так как год неполный. Заключительная уплата в 5-м году должна быть равна сумме остатка долга ($D_{ост}$) на начало 5-го года и начисленных на этот остаток процентов ($I_5$):

$$D_{ост} = 300(1 + 0{,}05)^4 - 70 \cdot s(4; 5) = 300 \cdot 1{,}2155063 - 70 \cdot 4{,}3101250 =$$
$$= 364{,}65189 - 301{,}70875 \approx 62943, \ I_5 = iD = 0{,}05 \cdot 62943 \approx 3147.$$

Откуда

$$Y_5 = 62943 + 3147 = 66090.$$

Этот ответ можно получить исходя из требования финансовой эквивалентности, которое выполняется при условии, что замыкающий платеж:

$$Y_5 = 300(1 + 0{,}05)^5 - 70 \cdot s(4; 5)(1 + 0{,}05) \approx 66090 \text{ руб.}$$

**5.** Цена контракта для финансовой компании равна текущей стоимости потока выплачиваемых фермером платежей, дисконтированных по ставке $i = 12\%/12 = 1\%$: $PV = 19373{,}74$ долл.

**6.** 14,3629%.

**7.** Современная ценность контракта с первой строительной организацией равна 16821121,76 руб., со второй – 16730756,89 руб. Следовательно, контракт со второй организацией несколько выгоднее, чем с первой.

Без существенной потери точности будем поток платежей по займу рассматривать как дискретную ренту с месячным периодом начисления процентов. Текущая стоимость такого потока:

$$A = 10000 \cdot \alpha(12; 1) \cdot \gamma(2; 12) \approx 10000 \cdot 11{,}2551 \cdot 0{,}7972 \approx 89726.$$

Абсолютный грант-элемент

$$W = D - A = 120000 - 89726 = 30274 \text{ руб.};$$

относительный грант-элемент: $w = (D - A)/D \approx 0{,}25 = 25\%$.

Более точный результат получится при рассмотрении дискретной ренты с начислением процентов один раз в году.

**9.** К концу 5-го года задолженность составит:

$$L_5 = 25000 \cdot 1{,}1^5 = 25000 \cdot 1{,}61051 = 40262{,}75 \text{ долл.}$$

Величина предстоящих годовых выплат равна:

$$Y = L_5/\alpha(5; 10) \approx 40262{,}75/3{,}79079 \approx 10621{,}203.$$

Таким образом, студент надеется на годовой доход $R = 21242{,}4059$ долл., или в среднем 1770 долл. в месяц.

**10.** а) Не зависит; б) $i = 40{,}2\%$; $j = 1{,}0556^{12} - 1 = 91{,}5\%$; в) $\approx 9{,}6$ мес.; г) рассмотрим, например, базовый вариант и 4-месячный кредит. Не ограничивая общности, цену можно принять за единицу, а первый взнос считать нулевым. По правилам потребительского кредита $(1 + i/3) / 4 = 0{,}285$. Откуда $i = 42\%$. Месячная ставка сложного процента $j_{\text{мес}}$ определяется уравнением: $0{,}285 \cdot \alpha(4, j_{\text{мес}}) = 1$, т.е. $j_{\text{мес}} = 0{,}0545$. Переходя к эффективной годовой ставке, найдем $j = 1{,}0545^{12} - 1 \approx 89\%$.

**Тесты**

**1.** (3); (4). **2.** (1). **3.** (2). **4.** (2), (3). **5.** (3). **6.** (2). **7.** (2). **8.** (1). **9.** (1). **10.** (2). **11.** (3). **12.** (2), (4). **13.** (2). **14.** (3). **15.** (3).

# Раздел 4
# ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ПРОЕКТЫ

В данный раздел включены задачи, которые в упрощенной форме ставят вопросы анализа и принятия инвестиционных решений в условиях определенности. Решая их, читатель получит первоначальные навыки для оценки инвестиционных проектов, которые пригодятся ему при освоении специализированных программных средств и необходимы в практической деятельности по управлению инвестициями. Вместе с тем они недостаточны хотя бы потому, что не охватывают вероятностные свойства инвестиционных процессов и присущие им риски. Автор надеется в дальнейшем снять эти претензии, уделив им специальную главу.

## 4.1. Основные понятия и формулы

*Инвестиционный процесс* – это временная последовательность взаимосвязанных инвестиций (вложений денег), отдача (доходы) от которых также растянута во времени. Период, в течение которого инвестиции будут приносить отдачу, определяет продолжительность проекта с момента его начала и называется жизненным циклом инвестиции.

Под инвестициями в настоящем разделе имеются в виду финансовые ресурсы, направляемые в реальный сектор экономики. Еще один вид инвестирования – в финансовые активы – будет рассмотрен в следующей главе.

*Поток наличности* (cash flaw). Для описания инвестиционного процесса необходимо прежде всего составить календарный график *денежного потока по проекту*. Этот поток состоит из инвестиций – необходимых объемов капитальных затрат и отдач на них – чистых доходов, получаемых в ходе реализации проекта. Под *чистым доходом* понимают общий доход (выручку) за вычетом всех платежей, связанных с его получением. В эти платежи входят все расходы (прямые и косвенные) по оплате труда, материалов, налогам, затраты на управление, маркетинг, стимулирование сбыта и пр. Поскольку амортизационные отчисления не вызывают оттока денежных средств, то они учитываются в потоке отдач: прибавляются к сумме чистой прибыли.

В общем случае, когда привлекается заемный капитал, наряду с денежным потоком по проекту следует также учитывать *денежный поток заемного капитала*. В этом потоке получению ссуды соответствуют положительные платежи, а выплатам в счет ее погашения – отрицательные.

*Денежный поток по* инвестируемому в проект *собственному* (акционерному) *капиталу* получается сложением этих потоков: денежного потока по проекту (капитальные вложения и отдачи) с денежным потоком заемного капитала (объем заимствования и погашающие платежи).

Подчеркнем, что для оценки выгодности инвестиционного проекта основное значение имеет денежный поток по проекту. В случае положительного результата следует также провести анализ денежного потока по акционерному капиталу и выяснить, как влияют условия кредита на эффективность вложения собственных средств.

Перед тем как оценивать эффективность инвестиций, необходимо преобразовать все денежные потоки по проекту к посленалоговому виду.

На оси времен инвестиционный проект можно изобразить двусторонней последовательностью платежей: отрицательные ординаты (вниз) – отток, положительные (вверх) – приток. При табличном задании этому соответствует временной ряд платежей со знаком плюс, который может быть опущен, – поступления, и со знаком минус – оттоки денежных средств. В стандартной, наиболее простой и типичной ситуации денежный поток развивается таким образом, что инвестиции, или отток капитала, предшествуют поступлениям, или его притоку. Однако возможны и другие, неординарные ситуации, когда отток и приток капитала чередуются, и даже «перевернутые» проекты, в которых притоки идут раньше оттоков, например, получение кредитов с последующим погашением.

### Критерии оценки эффективности инвестиционных проектов

Для инвестора, а также кредитора, если проект кредитуется, важно иметь количественные показатели, оценивающие выгодность проекта в терминах сопоставления требуемых инвестиционных затрат и получаемых экономических результатов.

**Показатели без дисконтирования.** К этим показателям относятся следующие простейшие характеристики сопоставления капитальных затрат и отдач без учета временного фактора.

*Норма прибыли на капитал.* Единого общепризнанного алгоритма расчета этого критерия не существует, в частности, в силу множественности приписываемых понятию «доход» измерителей: сумма прибыли и амортизации, доход после уплаты налогов и процентов за кредит, чистая прибыль.

Расчет нормы прибыли на капитал может проводиться двумя способами:

а) исходя из общего или среднего размера вложенного капитала в течение инвестиционного цикла (средних учетных инвестиций):

$$H_{\text{ПК}} = \frac{\frac{\sum Д_t}{n}}{I_0}; \quad H_{\text{ПК}} = \frac{\frac{\sum Д_t}{n}}{(I_0 + I_{\text{ост}})/2}; \quad I_{\text{ост}} = I_0 - A. \qquad (4.1)$$

где $\sum Д_t$ – сумма годовых доходов за весь срок;

$I_0$ – первоначальные вложения;

$I_{\text{ост}}$ – остаточная стоимость вложений;

$A$ – сумма износа основных средств, входящих в первоначальные вложения, за всю продолжительность проекта $n$;

б) по отношению к средним учетным инвестициям. В этом случае рассчитанный показатель называется ***показателем учетной нормы рентабельности*** и имеет общепринятую аббревиатуру ARR (Accounting Rate of Return).

В частном случае разовых начальных инвестиций $I_0$ и равных ежегодных отдач Д ($Д_1 = Д_2 = ... + Д_n = Д$) норма прибыли равна:

$$H_{\text{ПК}} = \frac{\text{Величина отдачи}}{\text{Объем инвестиций}} = \frac{Д}{I_0}.$$

*Простой (недисконтированный) период окупаемости.* Смысл этого показателя заключается в вычислении периода, необходимого для возмещения вложений за счет полученных доходов. Например, если некоторое мероприятие дает ежегодную прибыль П, то чистый ежегодный доход составит:

$$E = (1 - \eta)\Pi + A,$$

где $\eta$ — налоговая ставка;

А — амортизационные отчисления в расчете на год.

Тогда упрощенный, без учета временной неравноценности доходов, показатель срока окупаемости ($T_{ок}$) находится из уравнения

$$((1 - \eta)\Pi + A) \cdot T_{ок} = I,$$

где $I$ — сумма всех инвестиций,

и

$$T_{ок} = I/E. \tag{4.2}$$

При неравных значениях отдачи $\{E_t\}$ период окупаемости определяется минимальным сроком $n$, при котором:

$$\sum_{t=1}^{n} E_t - I \geq 0. \tag{4.3}$$

Обычно управляющий устанавливает некий максимальный период окупаемости и отклоняет все инвестиционные предложения, период окупаемости которых больше этого максимума.

*Приведенные затраты.* Использование данного показателя опирается на принцип сравнения затрат при тождественных результатах. Сравниваемые по затратам варианты различаются ежегодными текущими издержками $C$ и капитальными вложениями $K$, которые с помощью показателя приведенных затрат сводятся к одной величине

$$W = C + j \cdot K. \tag{4.4}$$

Здесь в качестве $j$ принимается минимально допустимая инвестором норма отдачи на его вложения (процент на капитал); ее еще называют нормативным показателем эффективности капиталовложений для данного хозяйствующего субъекта. Величину $j \cdot K$ можно толковать как ежегодные проценты, упущенные из-за отвлечения денег в данный проект. По результатам сравнения выбирается вариант $r$ с наименьшим значением приведенных затрат:

$$C_r + jK_r = \min_{s \leq n}(C_s + jK_s).$$

Сюда же относится случай, когда проекты можно условно привести к одинаковым результатам, скорректировав для этого издержки на их осуществление. Пусть, например, рассматриваемые варианты различаются и по объемам производства, и по расходам. Тогда в качестве коэффициента приведения затрат к одинаковой производительности (тождественному результату) следует использовать следующую формулу:

$$K_{\text{пр}} = \frac{D_{\max}}{D_s}.$$

Здесь $D_{\max}$ – максимальная производительность из представленных вариантов, которая рассматривается как тождественный результат, к которому приводятся вариантные затраты; $D_s$ – производительность по каждому варианту.

*Нормативный срок окупаемости.* Пороговое значение $j$ в формуле приведенных затрат (4.4) можно рассматривать как устанавливаемый инвестором норматив эффективности своих вложений (нормы прибыли на капитал). Ему соответствует нормативное значение срока окупаемости, которое, аналогично (4.2), удовлетворяет следующему условию:

$$jK \cdot T_{\text{ок}} = K.$$

Отсюда видно, что нормативный срок окупаемости есть величина, обратная нормативной эффективности:

$$T_{\text{ок}} = 1/j.$$

**Дисконтные показатели.** С помощью этих показателей сопоставимость разновременных инвестиционных затрат и чистых доходов производится с учетом времени посредством их расчетного приведения (дисконтирования) к началу проекта.

*Чистый приведенный доход* (net present value – *NPV*). Данный показатель равен разности современных величин потока доходов от проекта и потока вызвавших их инвестиционных затрат:

$$NPV = \underbrace{\sum E_t \gamma^t}_{\text{доходы}} - \underbrace{\sum I_t \gamma^t}_{\text{инвестиции}}. \tag{4.5}$$

Здесь и в дальнейшем $\gamma^t$ – дисконтный множитель по ставке сравнения $i$:

$$\gamma = \frac{1}{1+i}.$$

*Чистый наращенный доход* (net future value – *NFV*).Данный показатель равен разности наращенных на дату окончания $n$ величин потока доходов $\{E_t\}$ и потока инвестиционных затрат $\{I_t\}$:

$$NFV = NPV \cdot (1 + i)^n.$$

*Индекс рентабельности*

$$PI = \frac{\text{Сумма приведенных доходов}}{\text{Сумма приведенных инвестиционных затрат}} = \frac{\sum E_t \gamma^t}{\sum I_t \gamma^t}. \qquad (4.6)$$

В отличие от $NPV$ этот показатель является относительным – он характеризует уровень доходов на единицу затрат: чем больше значение индекса рентабельности, тем выше отдача каждого рубля, инвестированного в данный проект.

*Рентабельность.* Этот показатель оценивает эффективность инвестиционных затрат по отношению к результату, измеряемому величиной чистого приведенного дохода:

$$P = \frac{NPV}{\sum I_t \gamma^t}, \qquad (4.7)$$

причем, как легко установить,

$$PI = P + 1.$$

*«Дисконтированный» период окупаемости*

$$T_{\text{ок}} = \min n,$$

при котором

$$\sum_{t=1}^{n} E_t \gamma^t \geq \sum_{\text{инвестиции}} I_t \gamma^t . \qquad (4.8)$$

Очевидно, что в случае дисконтирования срок окупаемости превышает одноименную характеристику, не учитывающую неравноценности денег во времени.

*Внутренняя норма доходности* (internal rate of return — *IRR*). Численное значение этого показателя равно той ставке процента, при которой чистый приведенный доход проекта равен нулю. Инвестируя под эту ставку, мы получим финансовый результат, равносильный капитализации с тем же процентом всех полученных в ходе реализации проекта доходов.

Пусть $\{E_t\}$, $\{I_t\}$ — календарные графики доходов и инвестиций. Тогда внутренняя норма доходности $q$ является корнем уравнения

$$\sum_{\text{доходы}} E_t(1+q)^{-t} - \sum_{\text{инвестиции}} I_t(1+q)^{-t} = 0. \tag{4.9}$$

Левая часть уравнения (4.9) — многочлен от неизвестной $x = \dfrac{1}{1+q}$.

Для однозначного определения величины *IRR* данный многочлен должен иметь только один положительный корень. Это будет справедливо для денежных потоков, у которых отток (последовательные инвестиции) сменяется притоками, в сумме превосходящими этот отток.

В общем случае положительных корней может быть несколько или они могут отсутствовать, и поэтому задача отыскания *IRR* становится некорректной. От этого недостатка свободен показатель модифицированной внутренней нормы доходности, который можно применять для анализа проектов с неоднократно чередующимися инвестициями и доходами.

*Модифицированная внутренняя норма доходности* (*MIRR*). Для пояснения данного показателя будем исходить из возможности инвестора получать доходность на вложенные средства, равную ставке сравнения $i$. Тогда современная величина инвестированных в проект средств составит:

$$I(0) = \sum_{\text{инвестиции}} I_t(1+i)^{-t}, \tag{4.10}$$

а будущая стоимость чистых доходов (на завершающую дату проекта):

$$S(n) = \sum_{\text{доходы}} E_t(1+i)^{n-t}. \tag{4.11}$$

Показатель $MIRR$ определяется эффективной ставкой процента, которая, исходя из начальной суммы $I(0)$, позволяет получить финансовый результат $S(n)$:

$$MIRR = \left[\frac{S(n)}{I(0)}\right]^{1/n} - 1, \qquad (4.12)$$

где $n$ — продолжительность проекта.

В литературе описаны различные варианты построения $MIRR$, в том числе и такие, в которых текущая стоимость инвестиций $I(0)$ и будущая стоимость поступлений $S(n)$ определяются по разным ставкам дисконтирования. Для инвестиций это в случае заемного капитала – стоимость кредита, а для поступлений – доходность их реинвестирования.

### Анализ единичного проекта

В применении к единичному проекту перечисленные выше критерии позволяют выявить его целесообразность по сравнению с альтернативным вложением, доходность которого $i$ задает ставку дисконтирования.

**Условия целесообразности.** В табл. 4.1 приводятся типовые решения в зависимости от числовых оценок инвестиционного проекта длительности $T$.

Таблица 4.1

| Решение по проекту | $NPV$ | $PI$ | $IRR$ | $MIRR$ | $T_{ок}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Проект следует принять | $NPV > 0$ | $PI > 1$ | $IRR > i$ | $MIRR > i$ | $T_{ок} < T$ |
| Проект следует отвергнуть | $NPV < 0$ | $PI < 1$ | $IRR < i$ | $MIRR < i$ | Проект не окупается |
| Для принятия решения нужна дополнительная информация | $NPV = 0$ | $PI = 1$ | $IRR = i$ | $MIRR = i$ | $T_{ок} = T$ |

Эти выводы носят рекомендательный характер. Переход от целесообразности к окончательному выбору зависит от субъективной оценки инвестором степени расхождения в условиях-неравенствах и тех целей хозяйственной деятельности, которых он стремится достичь. Так, проект с $NPV = 0$, позволяющий увеличить масштабы производства, имеет дополнительный аргумент в свою пользу: в случае его реализации улучшится соотношение доли рынка, принадлежащей фирме.

В общем случае принятие инвестиционных решений зависит не только от критериев их эффективности, но также от финансовой состоятельности проекта и его влияния на показатели предприятия в целом, однако эти вопросы нами не рассматриваются. В связи с этим в предлагаемых задачах условия финансовой состоятельности проектов считаются выполненными и выбор проводится по критериям их экономической эффективности.

**Анализ с учетом заемного капитала.** Для его проведения целесообразно использовать следующее соотношение:

$$NPV_{\text{СК}} = NPV_{\text{ПРОЕКТ}} + NPV_{\text{ЗК}}. \qquad (4.13)$$

Иначе говоря, чистая приведенная стоимость денежного потока по собственному капиталу равна сумме одноименных характеристик денежных потоков по проекту и кредиту.

**Анализ на основе сравнения двух вариантов: «с проектом – без проекта».** Этот прием исходит из возможности анализа эффективности инвестиционного проекта путем сопоставления двух будущих альтернативных ситуаций:

- фирма осуществила свой проект;
- фирма не осуществляла этого проекта.

Сравнение ситуаций производится на основе сравнения присущих им потоков наличности. Решение принимается в пользу той ситуации, для которой текущая стоимость (ТС) порождаемого ею потока окажется выше.

Заметим, что, вычитая из первого потока (с проектом) второй (без проекта), мы придем к потоку наличности анализируемого инвестиционного процесса; при этом, как легко понять, характеристика этого проекта:

$$NPV = TC_1 - TC_2.$$

**Анализ в условиях инфляции.** Рост цен увеличивает как выручку, так и издержки производства, в результате чистые доходы номинально возрастают относительно не учитывающих инфляцию значений. Вместе с тем будет повышаться и номинальная ставка дисконтирования $j$, которая меняется в соответствии с условием:

$$1 + j = (1 + i)(1 + r).$$

Отсюда понятно, что учет инфляции через рост отдачи и ставки сравнения оказывает двоякое воздействие на результативность инвестиций: увеличение за счет индексирования платежей и снижение при их дисконтировании. В целом при умеренной инфляции, не порождающей резких изменений в экономике, эти тенденции взаимно уравновешиваются вплоть до ситуации, когда их влиянием на оценки эффективности можно пренебречь.

В качестве поясняющего примера рассмотрим проект с разовой инвестицией $I_0$ и потоком наличности $\{П_t\}$ до выплаты налога на прибыль. После налогообложения прибыли по ставке $\eta$ и с учетом амортизационных отчислений $A_t$ чистый доход составит:

$$E_t = (1 - \eta)(П_t - A_t) + A_t = (1 - \eta)\, П_t + \eta \cdot A_t.$$

В отсутствие инфляции показатель $NPV$ равен:

$$NPV = \sum_t \frac{(1-\eta)П_t + \eta A_t}{(1+i)^t} - I_0.$$

При нейтральной инфляции с темпом $r$ размер поступления $П_t$ возрастает каждый год в $(1 + r)$ раз, а учитывающее амортизацию слагаемое, в соответствии с правилами ее начисления, не меняется. Корректируя ставку дисконтирования, получим характеристику $NPV$, учитывающую действие инфляции:

$$NPV_{\text{инфл}} = \sum_t \frac{(1-\eta)П_t(1+r)^t + \eta A_t}{((1+i)(1+r))^t} - I_0.$$

Полученную формулу можно переписать в виде двух слагаемых $S_1$, $S_2$, таких, что величина первого из них

$$S_1 = \sum_t \frac{(1-\eta)П_t}{(1+i)^t} - I_0$$

не зависит от инфляции, а ее влияние сказывается (в сторону уменьшения) только на втором слагаемом:

$$S_2 = \sum_t \frac{\eta A_t}{((1+i)(1+r))^t}.$$

*Ставка дисконтирования.* Числовые значения используемых для оценки инвестиционных проектов дисконтных показателей существенно зависят от выбора ставки приведения $i$. В учебных задачах эта ставка, как правило, сообщается в исходных условиях и проблема ее назначения не ставится.

Зачастую данную ставку процента трактуют как альтернативные издержки, имея в виду доходность альтернативного вложения, которой жертвует инвестор, отвлекая средства в анализируемый проект. Однако это чересчур упрощенное толкование, под которое в случае предполагаемой нами определенности подпадает, например, доходность вложений в государственные облигации. Во многих ситуациях удобно также использовать ставку, по которой инвестор (фирма) может взять в долг.

Еще один подход – использование *средневзвешенной цены капитала* (Weighted Average Cost of Capital – *WACC*). Этот показатель отражает сложившийся на предприятии минимум возврата на вложенный в его деятельность капитал и рассчитывается как усредненная величина ставок привлечения (цены) капитала по используемым источникам средств (облигации, акции, кредиты и т.д.):

$$WACC = \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot d_k, \tag{4.14}$$

где $i_k$ – цена $k$-го источника привлечения;

$d_k = \dfrac{Q_k}{\Sigma Qs}$ – удельный вес $k$-го источника в общей их сумме.

Средневзвешенные затраты на капитал используются для оценки инвестиций, касающихся бюджетов долгосрочных вложений; поэтому в расчетах этого показателя источники краткосрочных средств не учитываются. Чтобы отразить влияние налогов, в качестве ставки дисконтирования рассматривают цену капитала после налогов. Для этого в слагаемых (4.14), отвечающих долговым обязательствам, корректируют цену источника привлечения, полагая $\tilde{i}_k = i_k(1 - \eta)$, где $\eta$ – ставка налога.

Показатель *WACC* рекомендуется в качестве ставки дисконтирования для оценки новых инвестиций, не нарушающих принятых традиций производственно-хозяйственной деятельности данной компании. Формула работает для «среднего» проекта и дает минимально приемлемую норму его доходности, обеспечивающую выплаты по акционерному и заемному капиталу.

Отсюда понятна непригодность данного показателя при изменении структуры инвестируемого капитала и уровня надежности проектов по сравнению с существующими активами фирмы.

При расчетах критериев эффективности (4.5) – (4.12), как правило, используется постоянная ставка дисконтирования, однако при некоторых обстоятельствах, меняющих ставку сравнения $i$, ее прогнозируемые значения следует учитывать в таких же изменениях (по годам) ставки дисконтирования.

### Анализ конкурирующих проектов

**Сравнение по нескольким критериям.** Необходимость подобного анализа возникает, например, при выборе одного проекта из нескольких. Ограничимся задачей выбора наиболее эффективного инвестиционного процесса из множества возможных проектов. Для каждого из них можно определить численные значения критериев эффективности (4.5) – (4.12). В результате придем к задаче многокритериального выбора, для которой, в силу присущей оценкам противоречивости, может и не оказаться проекта, доминирующего по всем критериям. Конфликтность оценок проявляется в ситуации, когда проект, превосходящий по одному из критериев, скажем, *NPV*, уступает по другому, например *IRR* или (и) $T_{ок}$.

При наличии разнонаправленных оценок рекомендуется брать за основу показатель *NPV*. Вместе с тем в практической деятельности инвестору, ранжируя критерии, зачастую приходится опираться на субъективные соображения исходя из экономического смысла используемых им показателей и с учетом риска. Последнее, в том числе, означает, что возможные неточности в прогнозах денежного потока могут дать ошибочный по показателю *NPV* вывод: проект, который ранее рассматривался как прибыльный, окажется убыточным. В отличие от этого критерий *IRR* менее чувствителен к ошибкам прогноза: при прочих равных условиях чем больше *IRR* по сравнению с ценой капитала, тем больше «резерв безопасности проекта». В определенных ситуациях, например, при наличии острой потребности в деньгах, на первое место выступает критерий минимизации срока окупаемости, а при выборе одного проекта из ряда примерно одинаковых по значению *NPV* – требование максимизации эффективности вложений, т.е. *PI*.

В общей постановке для решения многокритериальной задачи выбора можно использовать известный прием ее сведения к оптимизации с одной целевой функцией, полученной суммированием исходных оценок с назначаемыми им весами.

**Сравнительная характеристика критериев *NPV* и *IRR*.** Критерий *IRR* имеет смысл для проектов с одним чередованием знака в потоке платежей. В этом случае оценки *NPV* и *IRR* согласованы при условии, что чистый приведенный доход одного из этих проектов доминирует независимо от выбора альтернативной ставки. Если это не так, то существует ставка, при которой оба проекта имеют одинаковые *NPV*, так называемая *точка Фишера*. Соответствующее ей значение коэффициента дисконтирования служит пограничной ставкой между ситуациями, которые «улавливаются» критерием *NPV* и не «улавливаются» критерием *IRR*.

**Сравнение проектов разной длительности.** При сравнительном анализе таких проектов следует учитывать возможность продуктивного использования денежных поступлений по каждому из них в виде финансового результата, приведенного к одной и той же будущей дате. Если за эту дату принять срок окончания самого длинного проекта, а возможность вложений оценивать альтернативной ставкой $i$, то, как легко понять, числовые значения критериев оценки сравниваемых проектов не изменятся. Это означает, что при сделанном допущении относительно доходности сопутствующего инвестирования сравнительный анализ разных по продолжительности проектов проводится так же, как и для проектов с одинаковыми сроками.

Подобный подход, однако, не учитывает допустимости повторной реализации каждого из рассматриваемых проектов, что соответствует повторению инвестиций с доходностью, равной внутренней норме прибыли соответствующего инвестиционного процесса. На основе данного предположения используют специальные методы, позволяющие элиминировать влияние разрывов в продолжительности инвестиционных циклов. Поясним их суть на примере двух проектов А, Б продолжительностью $n_А$ и $n_Б$.

1. Каждый из проектов рассматривается как повторяющийся столько раз, чтобы в результате получился наименьший общий

срок их действия. Тогда сравнение исходных проектов сводится к сравнению гипотетических инвестиционных процессов, порождаемых кратным повторением проектов А и Б в пределах общего срока.

2. Сравниваемые проекты считаются повторяемыми бесконечное число раз с периодичностью, равной их продолжительности. В этом случае сравнение проектов сводится к сравнению бессрочных аннуитетов с платежами $NPV_А$, $NPV_Б$ и периодами $n_А$ и $n_Б$ соответственно.

3. Для каждого проекта находят эквивалентную ему постоянную ренту, приведенная стоимость которой равна NPV проекта, иными словами, рассчитывают величину платежа $R$ с помощью формулы (3.6):

$$R_A = \frac{NPV_А}{\alpha(n_А, i)}; \; R_Б = \frac{NPV_Б}{\alpha(n_Б, i)}.$$

Опираясь на эти данные, сопоставимый анализ проектов сводят к сравнению бессрочных финансовых потоков с теми же значениями платежей $R_А$ и $R_Б$.

Эти же приемы годятся для одинаковых по результатам, но разных по срокам проектов, для которых сопоставимый анализ проводится на основе сравнения потоков затрат.

Методам, основанным на повторе исходных проектов, присуща определенная условность, заключающаяся в молчаливом распространении исходных условий на будущее, что, естественно, не всегда корректно. Поэтому к применению этих методов нужно подходить осознанно, в том смысле, что если исходным параметрам сравниваемых проектов свойственна достаточно высокая неопределенность, можно не принимать во внимание различие в продолжительности их действия и ограничиться расчетом стандартных критериев.

**Формирование портфеля проектов.** До сих пор в качестве возможного приложения методов оценки инвестиций мы ограничивались задачей выбора одного проекта из ряда возможных, куда, в том числе, включался и вариант альтернативного инвестирования по ставке $i$. Естественным расширением данной постановки является задача выбора нескольких проектов из ряда возможных. Содержательно эта задача относится к известной проблеме формирования бюджета капитальных вложений, «идеальное» решение которой предполагает извлечение максимально возможной при действующих ограничениях выгоды.

На практике зачастую довольствуются приближенными, но простыми в процедурном плане решениями, полученными в зависимости от выбранного критерия оценки: внутренней нормы доходности (*IRR*), чистого приведенного дохода (*NPV*), рентабельности инвестиций (*P*). При использовании относительного показателя (*IRR*, *P*) все доступные проекты упорядочиваются по его величине. Далее проводится их последовательный просмотр, и они отбираются при условии, что тестируемый показатель превышает пороговое ограничение (цена капитала, «планка» рентабельности) и, кроме того, выполняется бюджетное ограничение, учитывающее возможности привлечения дополнительного капитала.

Вместе с тем качество решения можно существенно повысить за счет его оптимизации с помощью методов математического программирования. Для этого прежде всего требуется построить математическую модель оптимального портфеля проектов. Основные элементы формализации подобных моделей определяются требованиями математического описания критериев задачи и ее ограничений. В качестве примера приведем ряд исходных предпосылок, которые следует отразить при построении модели:

- проекты могут быть как независимыми, так и альтернативными;
- проекты могут быть как неделимыми, так и дробными, которые допускают «пропорциональную» реализацию;
- включение очередного проекта в бюджет капиталовложений предполагает нахождение источника его финансирования;
- существует ряд ограничений по ресурсному и временному параметрам, которые необходимо учитывать при разработке бюджета.

Вместе с тем многообразие реальных ситуаций существенно перекрывает возможности «заготовок», и адекватность конструируемых моделей во многом зависит от квалификации решающих задачу специалистов.

В качестве «хрестоматийного» примера подобных моделей упомянем так называемые оптимизационные модели в вариантной постановке. Для них в качестве исходного «кирпичика» используются неделимые инвестиционные проекты и отвечающие им двоичные неизвестные, которые для отбираемых проектов принимают значение 1, а для неотбираемых – 0. Все проекты перенумеровываются, и каждому ставится в соответствие вектор его характеристик: упорядоченных во времени затрат, результатов и интересующих инвестора оценок эффективности.

Система критериев и ограничений формируемой модели записывается в виде взвешенных по двоичным переменным сумм соответствующих компонент этих векторов. Более того, благодаря булевым свойствам этих переменных с их помощью можно записать различные специальные ограничения, например, по совместимости отбираемых проектов, их общему числу, предшествованию во времени и т.д. и т.п. В результате получается задача двоичного программирования, решаемая известным *методом ветвей и границ*.

В заключение отметим, что добавление дробных проектов с непрерывными неизвестными частями их реализации расширяет эту вариантную постановку до задачи смешанного программирования.

## 4.2. Типовые примеры

1. *Анализ единичного проекта.*

Для покупки и запуска оборудования по производству нового продукта требуются капиталовложения в размере 1 млн руб. (1000 тыс. руб.). Проект рассчитан на 7 лет, в течение которых ожидаемый ежегодный доход от реализации данного продукта после налогообложения (т. е. чистый доход) будет равен 200 тыс. руб. Провести анализ данного проекта на основе критериев оценки инвестиционных процессов при условии, что ставка сравнения – 10% в год.

Решение

Заниженная оценка (4.2) срока окупаемости (при игнорировании временного фактора) этого инвестиционного проекта равна:

$$T_{\text{ок}} = 1000/200 = 5 \text{ лет.}$$

Проверим, окупятся ли сделанные инвестиции за этот срок, если учитывать неравноценность денег во времени. Для этого сравним приведенную стоимость полученных за первые 5 лет доходов ($PV_5$) с величиной вложений $I = 1000$.

$$PV_5 = \alpha(5;10) \cdot 200 \approx 3{,}79079 \cdot 200 = 758{,}158.$$

Таким образом, при использовании уточненной оценки (дисконтированного срока окупаемости) придем к противоположному выводу – 5 лет для окупаемости проекта недостаточно.

А что будет с окупаемостью за весь срок ($n = 7$)? Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим чистый приведенный доход проекта (4.5):

$$NPV = PV_7 - I = 200 \cdot \sum_{k=1}^{7} (1+0{,}1)^{-k} - 1000 = \alpha(7;10) \cdot 200 - 1000 \approx$$
$$\approx 4{,}8684 \cdot 200 - 1000 = -26{,}32 \text{ тыс. руб.}$$

Отрицательный результат показывает, что проект не окупится. Иными словами, жизненный цикл инвестиции продолжительностью 7 лет не обеспечивает требуемого уровня доходности 10%: наращенная стоимость поступлений по проекту не перекрывает упущенной из-за его реализации выгоды альтернативного варианта:

$$S = s\,(7;10) \cdot 200 \approx 9{,}4872 \cdot 200 = 1897{,}44 < 1000 \cdot 1{,}1^7 \approx 1948{,}7.$$

В случае инвестирования на заемных под сложную ставку 10% средствах это означает, что достижимый по проекту финансовый результат недостаточен для погашения кредита.

Если же рассмотреть аналогичный проект продолжительностью в 8 лет, то он окупится в течение последнего года его реализации:

$$NPV = PV_8 - I = 200 \cdot \sum_{k=1}^{8} (1+0{,}1)^{-k} - 1000 = \alpha(8;10) \cdot 200 - 1000 \approx$$
$$\approx 5{,}3349 \cdot 200 - 1000 = 66{,}98 \text{ тыс. руб.}$$

Индекс рентабельности (4.6) анализируемого проекта

$$PI = \frac{PV_7}{I} = \frac{973{,}68}{1000} \approx 0{,}974.$$

Эта величина меньше единицы, и поэтому его доходность (рентабельность (4.7)) составит:

$$P = -26{,}32/1000 \approx -0{,}026 = -2{,}6\%.$$

В то же время для восьмилетнего проекта показатель

$$PI = \frac{PV_8}{I} = \frac{1066,98}{1000} \approx 1,067 > 1,$$

и рентабельность будет положительна:

$$P = PI - 1 \approx 0,067 = 6,7\%.$$

Вычислим внутреннюю норму доходности для исходных данных рассматриваемого примера. Искомая характеристика должна удовлетворять уравнению (4.9):

$$\alpha(7;IRR) \cdot 200 - 1000 = 0.$$

Откуда $\alpha(7;IRR) = 5$. По таблице коэффициентов приведения ренты подбираем $IRR$:

$$\frac{IRR - 9}{9,5 - IRR} \approx \frac{0,0329}{0,0504},$$

получаем $IRR \approx 9,197\%$.

Так как требуемая норма доходности (10%) выше этого значения, то инвестиция является нерентабельной.

Основываясь на полученных оценках, приходим к выводу о том, что проект следует отвергнуть.

**2.** *Средневзвешенные затраты на капитал* (*WACC*). Рассчитайте средневзвешенную цену капитала компании; структура капитала (соотношение источников финансирования) дана в табл. 4.2.

Таблица 4.2

| Источник средств | Доля % | Цена % |
|---|---|---|
| Акционерный капитал | 80 | 12,0 |
| Долгосрочные долговые обязательства | 20 | 6,5 |

Как изменится значение показателя *WACC*, если учесть налоговую защиту по процентным платежам, т.е. с учетом налогообложения прибыли по ставке $h = 0,32$.

Решение

Подставляя данные таблицы в (4.13), получим:

$$WACC = 12{,}0 \cdot 0{,}8 + 6{,}5 \cdot 0{,}2 = 10{,}9\%.$$

Налог на прибыль уменьшает цену капитала до значения $i = 6{,}5 \cdot (1 - 0{,}32) = 4{,}42$ (проценты за кредит разрешено относить на себестоимость). Отсюда получим скорректированное значение:

$$WACC_{\text{скор}} = 12{,}0 \cdot 0{,}8 + 4{,}42 \cdot 0{,}2 = 10{,}484\%.$$

**3.** *Денежные потоки инвестиционного проекта.*

Коммерческая организация рассматривает целесообразность приобретения новой технологической линии. Стоимость линии составляет 10 млн долл., срок эксплуатации – 5 лет, износ на оборудование начисляется методом прямолинейной амортизации по 20% годовых. Выручка от реализации продукции прогнозируется по годам в следующих объемах, тыс. долл.: 6800, 7400, 8200, 8000, 6000. Текущие расходы по годам оцениваются следующим образом: 3400 тыс. долл. в первый год эксплуатации линии с последующим ежегодным ростом их на 3%. Данный проект не выходит за рамки традиционной финансово-хозяйственной деятельности с ценой авансированного капитала (*WACC*) 19%. Ставка налога на прибыль 30%. Целесообразен ли данный проект к реализации?

Решение

Для получения ответа необходимо рассчитать чистый поток денежных средств и определить характеристики этого потока, оценивающие эффективность проекта. Ниже приведена сводная таблица исходных (жирный шрифт) и расчетных значений денежных потоков, в том числе и потока чистых денежных поступлений (табл. 4.3).

Таблица 4.3

| № п/п | Показатель | Год | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й |
| 1 | Объем реализации | | **6800** | **7400** | **8200** | **8000** | **6000** |
| 2 | Текущие расходы ($C_t = C_{t-1} \cdot 1{,}03$) | | **3400** | 3502 | 3607 | 3715 | 3827 |
| 3 | Износ (амортизация) ($10000 \cdot 20\%$) | | 2000 | 2000 | 2000 | 2000 | 2000 |

*Продолжение*

| № п/п | Показатель | Год | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й |
| 4 | Налогооблагаемая прибыль (стр. 1 – – стр. 2 – стр. 3) | | 1400 | 1898 | 2593 | 2285 | 173 |
| 5 | Налог на прибыль (налогооблагаемая прибыль·30%) | | 420 | 569 | 778 | 686 | 52 |
| 6 | Чистая прибыль (стр. 4 – стр. 5) | | 980 | 1329 | 1815 | 1599 | 121 |
| 7 | Капитальные вложения | –10000 | | | | | |
| 8 | Чистый поток денежных средств (стр. 3 + + стр. 6 + стр. 7) | –10000 | 2980 | 3329 | 3815 | 3599 | 2121 |

Используя данные нижней строки, найдем показатель чистого приведенного дохода:

$$NPV = -10000 + 2980 \cdot \frac{1}{1{,}19} + 3329 \cdot \frac{1}{1{,}19^2} + 3815 \cdot \frac{1}{1{,}19^3} +$$

$$+3599 \cdot \frac{1}{1{,}19^4} + 2121 \cdot \frac{1}{1{,}19^5} = -198 \text{ тыс.}$$

Отсюда понятно и без вычислений, что *IRR* данного проекта не превосходит *WACC* = 19%, его индекс рентабельности меньше единицы, и если учитывать неравноценность денег во времени, то проект себя не окупит. Согласно полученным выводам, проект следует отвергнуть.

**4.** *IRR* и *MIRR*.

Рассмотрим проект со следующим потоком денежных средств:

| Год | 0-й | 1-й | 2-й |
|---|---|---|---|
| Денежный поток | –100 | +200 | –75 |

Определить:

а) сколько значений внутренней нормы доходности имеет данный проект?

б) чему равен критерий модифицированной внутренней нормы доходности, если альтернативные издержки равны 20%?

в) привлекателен ли данный проект?

Решение

а) данный проект завершается оттоком капитала. Эта неординарная ситуация вполне реальна и может быть связана, например, с необходимостью демонтажа оборудования, затратами на восстановление окружающей среды и т.д. Знак в потоке денежных средств меняется два раза, поэтому следует ожидать, что определить внутреннюю норму прибыли с помощью показателя *IRR* не удастся.

В самом деле, уравнение (4.9) в нашем случае примет вид

$$-100 + 200x - 75x^2 = 0$$

и имеет корни

$$x_1 = 2,\ x_2 = {}^2/_3.$$

Откуда для отыскания внутренней нормы доходности получим два уравнения:

$$\frac{1}{1+q} = \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$$

Им отвечают два значения *IRR*:

$$q_{1,2} = \pm\,{}^1/_2;$$

б) приводя все затраты к началу, а все поступления – к окончанию проекта, найдем по формулам (4.10), (4.11) значения $I(0) =$ $= 100 + 75 \cdot (1 + 0{,}2)^{-2} \approx 152{,}08$, $S(2) = 200 \cdot 1{,}2 = 240$ и, пользуясь определением (4.12), вычислим величину

$$MIRR = \left[\frac{S(2)}{I(0)}\right]^{1/2} - 1 = \left[\frac{240}{152{,}08}\right]^{1/2} - 1 \approx 0{,}256 = 25{,}6\%;$$

в) опираясь на понятие альтернативной ставки, вычисленному показателю можно дать следующее толкование. Данный проект финансируется за счет того, что мы не используем альтернативной возможности вложения средств под ставку 20%. Текущая оценка этих вложений равна $I(0)$. (Дело обстоит так, как будто мы кредитуем наш проект по ставке 20%.) Поступающие средства можно реинвестировать под ту же ставку с возвратом в конце срока в размере $S(2)$. Отсюда понятно, что показатель $MIRR$ – доходность (по сложному проценту) вложения $I(0)$, дающего финансовый результат $S(2)$. Так как величина $MIRR = 25{,}6\%$ перекрывает ставку сравнения $i = 20\%$, то проект привлекателен. Данный вывод подтверждается также и значением показателя $NPV \approx$ $\approx 14{,}58$, которое положительно.

5. *Анализ взаимоисключающих проектов.*

У компании АБВ имеется четыре инвестиционных проекта, каждый из которых вполне приемлем, но принять можно только один. Данные о проектах представлены следующими временными рядами (табл. 4.4)

Таблица 4.4

| Год | Проект 1 | Проект 2 | Проект 3 | Проект 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0-й | –1200 | –1200 | –1200 | –1200 |
| 1-й | 0 | 100 | 300 | 300 |
| 2-й | 100 | 300 | 450 | 900 |
| 3-й | 250 | 500 | 500 | 500 |
| 4-й | 1200 | 600 | 600 | 250 |
| 5-й | 1300 | 1300 | 700 | 100 |

Требуется оценить целесообразность выбора одного из них по критерию:

а) чистого приведенного дохода ($NPV$);

б) внутренней нормы прибыли ($IRR$);

в) сроку окупаемости (дисконтированному) ($T_{ок}$), если цена капитала 12% .

Решение

Сравниваемые значения показателей найдем с помощью функций ЧПС и ВСД финансового анализа Excel способом диалоговых окон «Мастера функций». В результате получим следующую таблицу числовых оценок по каждому проекту (табл. 4.5).

Таблица 4.5

| Оценка | Проект 1 | Проект 2 | Проект 3 | Проект 4 |
|---|---|---|---|---|
| *NPV* | 557,9 | 603,3* | 561,0 | 356,8 |
| *IRR* | 22,67% | 24,99% | 27,07%* | 25,33% |
| $T_{ок}$ | $4<T_{ок}<5$ | $4<T_{ок}<5$ | $3<T_{ок}<4$ | $2<T^*_{ок}<3$ |

Примечание. Звездочкой отмечено лучшее значение данного показателя.

Если проекты рассматривать изолированно, то каждый из них может быть одобрен, поскольку они удовлетворяют всем критериям. Однако если проекты являются альтернативными, то заведомо следует отвергнуть проект 1, поскольку он уступает по всем критериям проекту 2. Что касается оставшихся проектов, то выбор не очевиден, так как критерии их оценок противоречивы. Если руководствоваться требованиями поставленной задачи, то получим следующие ответы: а) проект 2; б) проект 3; в) проект 4.

**6.** *Точка Фишера.*

Рассматриваются два альтернативных проекта (табл. 4.6).

Таблица 4.6

| Проект | Величина инвестиций | Денежный поток по годам | | | *IRR*,% |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1-й | 2-й | 3-й | |
| А | –100 | 90 | 45 | 9 | 30,0 |
| Б | –100 | 10 | 50 | 100 | 20,4 |

Требуется:

а) найти точку Фишера;

б) сделать выбор при $r = 8\%$ и при $r = 15\%$.

Решение

а) Точка Фишера для потоков А и Б может быть найдена как *IRR* приростного потока (А – Б), или, что то же самое, (Б – А) (см. табл. 4.6).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Б – А | 0 | –80 | 5 | 91 |

Применяя Excel, найдем $IRR = 9{,}82\%$;

б) за этой точкой ($r = 15\%$) проект с большим значением *IRR* будет превосходить и по показателю *NPV*, т. е. предпочесть следует проект А; до этой точки($r = 8\%$) выбор должен быть в пользу проекта Б.

7. *Показатель приведенных затрат.*

Предприятие имеет возможность выбрать агрегат из трех предложенных вариантов, каждый из которых обеспечивает выпуск запланированного годового объема продукции. Варианты различаются себестоимостью годового выпуска и капитальными вложениями (табл. 4.7).

Таблица 4.7

| Вариант | Капиталовложения на внедрение агрегата, $K_j$, млн руб. | Себестоимость годового выпуска продукции, $C_j$, млн руб. |
|---|---|---|
| 1 | 400 | 70 |
| 2 | 450 | 61 |
| 3 | 500 | 52 |

Какой вариант предпочтет предприятие при нормативе эффективности, принятом на уровне 15 %?

Решение

По условию варианты характеризуются одинаковой производительностью, но различаются размерами капитальных и текущих затрат. Поэтому для выявления наилучшей альтернативы можно воспользоваться показателем приведенных затрат (4.4). Вычисляя, найдем его значение для каждого варианта:

$$W_1 = 70 + 0{,}15 \cdot 400 = 130,$$
$$W_2 = 61 + 0{,}15 \cdot 450 = 128,$$
$$W_3 = 52 + 0{,}15 \cdot 500 = 127.$$

Сравнивая, приходим к выводу, что предприятие предпочтет третий вариант как обладающий минимальными приведенными затратами.

**8.** *Сравнение разновременных проектов одинаковой производительности.* Для выпуска однородной продукции можно использовать технологию А или технологию Б. Требуемое по каждому варианту оборудование имеет одинаковую производительность, но различается по цене, эксплутационным затратам, сроку службы (2 и 3 года соответственно) (табл. 4.8).

Таблица 4.8

| Вариант | Затраты, тыс. долл. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Цена оборудования | Эксплутационные издержки | | |
| А | 15 | 5 | 5 | 5 |
| Б | 10 | 6 | 6 | |
| Годы | 0 | 1 | 2 | 3 |

В какую технологию выгоднее вложить деньги: А или Б, если ставка сравнения 6%?

Решение

Для выявления предпочтительного варианта применим принцип сравнения затрат при одинаковых результатах, приспособив его для проектов разной длительности. Для этого воспользуемся методом эквивалентных ежегодных затрат, составляющих по каждому проекту аннуитет той же срочности и имеющий ту же приведенную стоимость. Вычисляя, получим: $PV$(А) = 28,36; эквивалентный ежегодный платеж $R$(А) = 10,61; $PV$(Б)=21,00; эквивалентный ежегодный платеж $R$(Б) = 11,45.

Считая эти проекты повторяемыми 2 и соответственно 3 раза, придем к сравнению затрат в пределах общего срока $n = 6$. Так как эквивалентные ежегодные затраты варианта А меньше ($10{,}61 < 11{,}45$), то отвечающая ему технология выгоднее, чем технология варианта Б.

Игнорируя разницу в длительности проектов, мы придем к противоположному выводу. В самом деле, если исключить возможность циклического повторения проектов, то сравнение по показателю *NPV* при одинаковых производительностях технологий А и Б равносильно сравнению дисконтированных затрат $PV$(А), $PV$(Б). Для варианта А эти затраты больше ($28{,}36 > 21{,}00$), поэтому при таком сравнении выгодным становится вариант Б.

Если исходить из предположения непрекращающегося выпуска однородной продукции как условия нормального ведения производственно-хозяйственной деятельности, то верным следует признать вывод, основанный на сравнении эквивалентных платежей $R$(А), $R$(Б).

**9.** *Сравнение разновременных проектов разной производительности.* Имеются два независимых проекта – А и Б продолжительностью 1 и 3 года, которые характеризуются следующими потоками платежей, млн руб.:

| Проект | Год | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й |
| А | –100 | 120 | | |
| Б | –50 | 30 | 40 | 15 |

Требуется оценить целесообразность выбора одного из них в зависимости от принятого критерия эффективности и при условии, что ставка сравнения равна 10%.

Решение

Для более короткого проекта: *NPV*(А) = 9,1 млн руб., *PI*(А) = = 1,09 = 109%, *IRR*(А) = 20%, $T_{ок}$(А) ≈ 1, а значения одноименных характеристик для проекта В равны: *NPV*(Б) = 21,6 млн руб., *PI*(Б) = 1,432 = 143,2%, *IRR*(Б) = 35,4%, 1 < $T_{ок}$(Б) < 2. Без устранения временной несопоставимости оценок проект А по основным показателям (*NPV* и *IRR*) уступает варианту Б.

Элиминируем влияние разрыва в продолжительности инвестиционных циклов. Для этого рассмотрим в качестве конкурирующего с Б расширенный проект $\tilde{А}$, полученный трехкратным повторением варианта А.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| А | –100 | 120<br>–100 | 120<br>–100 | 120 |
| $\tilde{А}$ | –100 | 20 | 20 | 120 |

Проект $\tilde{А}$ имеет следующие значения критериев: *NPV*($\tilde{А}$) = = 24,87 млн руб., *PI*($\tilde{А}$) = 1,25 = 125%, *IRR*($\tilde{А}$) = 20%, 2 < $T_{ок}$($\tilde{А}$) < < 3. По критерию *NPV* проект $\tilde{А}$ уже предпочтительнее проекта Б, поэтому выбор между исходными проектами (А, Б) в пользу Б не представляется бесспорным. Обратим внимание на то, что *IRR*($\tilde{А}$) = *IRR*(А) = 20%. Согласно определению показатель *IRR* – внутренняя годовая ставка доходности вложений, поэтому и в общем случае эта характеристика будет иметь одинаковые значения для исходного проекта и того, который получен его периодическим возобновлением. Таким образом, для «периодического» проекта достаточно ограничиться вычислением *NPV*, так как его оценка по показателю *IRR* будет та же, что и в укороченном варианте.

**10.** *Оптимальный выбор нескольких проектов.* Фирма имеет возможность инвестировать ежегодно до 10 млн руб. В качестве возможных объектов вложения рассматриваются четыре проекта, заданные следующими денежными потоками, млн руб. (табл. 4.9).

Таблица 4.9

| Номер проекта | Год | | |
|---|---|---|---|
| | 0-й | 1-й | 2-й |
| 1 | −10 | +30 | +5 |
| 2 | −5 | +5 | +20 |
| 3 | −5 | +5 | +15 |
| 4 | 0 | −40 | +60 |

Рассматриваемые проекты поддаются дроблению, т.е. можно реализовывать не только целиком каждый из анализируемых проектов, но и любую его часть; при этом берется к рассмотрению соответствующая доля инвестиций и денежных поступлений.

Требуется составить портфель проектов с максимальным значением показателя чистого приведенного дохода, если ставка дисконтирования – 10%.

Решение

Для решения необходимо построить математическую модель задачи. Обозначим через $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ подлежащие определению масштабы реализации этих проектов. Ввиду аддитивности показателя *NPV* чистый приведенный доход портфеля, состоящего из $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ частей каждого проекта, составляет величину

$$Z = \sum_{k=1}^{4} x_k NPV_k .$$

Применяя Excel, найдем для каждого проекта численное значение показателя *NPV*.

| Проект | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| *NPV* | 21,4 | 16,07 | 11,94 | 13,22 |

Подставим эти данные в формулу $Z$ и запишем критерий оптимизации формируемого портфеля проектов:

$$Z = 21{,}4x_1 + 16{,}07x_2 + 11{,}94x_3 + 13{,}22x_4 \rightarrow \max.$$

Перейдем к ограничениям, которые налагаются на выбор неизвестных $\{x_i\}$. По условию, начальные вложения ограничены 10 млн руб. Поэтому

$$10\,x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 \leq 10.$$

В начале 2-го года бюджет капитальных вложений может быть увеличен за счет поступлений по реализуемым проектам. С учетом этого придем к следующему неравенству:

$$40x_4 \leq 10 + 30x_1 + 5x_2 + 5x_3.$$

Части внедряемых проектов не могут быть отрицательны, следовательно,

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Построенная модель представляет задачу линейного программирования, которую можно решить в Excel с помощью команды **Сервис**, **Поиск решения**.

В результате расчета получим следующий оптимальный план инвестиций. Вначале все 10 млн руб. должны быть инвестированы во второй проект ($x_2^{опт} = 2$), а по окончании 1-го года следует приступить к реализации «уполовиненного» четвертого проекта ($x_4^{опт} = 5$), первый и третий проекты в портфель не включаются ($x_1^{опт} = 0$; $x_3^{опт} = 0$). При таком плане инвестиций величина чистого приведенного дохода достигает наибольшего значения: $NPV_{\max} = 38{,}75$ млн руб.

## 4.3. Задачи для самостоятельного решения

### Расчетные задачи

**1.** Предприятие имеет возможность выбрать один из двух типов оборудования А или Б, выполняющих одну и ту же функцию. Срок эксплуатации А – 1 год, Б – 3 года. Сравниваемые варианты имеют следующие потоки вложений и отдач (табл. 4.10).

Таблица 4.10

| Инвестиционный проект | Денежные потоки за период | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| А | –10000 | 12000 | | |
| Б | –10000 | 5000 | 5000 | 5000 |

Если цена капитала 8%, то какое оборудование выгоднее для предприятия: А или Б?

**2.** Инвестиционные проекты А и Б характеризуются следующим распределением потоков платежей (расходов и доходов в конце каждого года) (табл. 4.11).

Таблица 4.11

| Проект | Год | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й | 6-й | 7-й |
| А | –100 | –150 | 50 | 100 | 100 | 150 | 150 |
| Б | –200 | –50 | 50 | 50 | 100 | 200 | 200 |

Ставка сравнения составляет 10%. Найти значение чистой текущей стоимости, внутренней ставки доходности, рентабельности, срока окупаемости и обосновать вариант вложения средств.

**3.** Проект, требующий 700 ден. ед. начальных инвестиций, приносит прибыль 1000 ден. ед. через 2 года. Годовая банковская процентная ставка равна 12%. Определить:

а) текущую ценность проекта;

б) внутреннюю норму прибыли.

**4.** Имеются варианты инвестиционного проекта, которые характеризуются следующими потоками платежей.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| А | –100 | –150 | 50 | 150 | 200 | 200 | |
| Б | –200 | –50 | 50 | 100 | 100 | 200 | 200 |

Требуется оценить целесообразность выбора одного из них в зависимости от принятого измерителя эффективности и при условии, что ставка сравнения принята на уровне 10%.

**5.** На строительство магазина надо затратить в течение месяца около 10 000 долл., а затем он неограниченно долго будет давать 2000 долл. в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

**6.** Последовательность платежей по проекту представлена в виде следующей временной диаграммы.

| Год | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Платежи | – 1000 | – 200 | 300 | 600 | 700 | 500 |

Известно, что внутренняя норма прибыли альтернативных проектов с таким же финансовым риском, как и данного проекта, равна 17%. Определить чистую текущую стоимость и внутреннюю норму доходности данного проекта. Для решения уравнения относительно *IRR* советуем воспользоваться электронными таблицами.

**7.** Имеются два альтернативных проекта:

А – (50; –150; 140);

Б – (–50; 10; 90).

Сравнить эти проекты по предпочтительности в зависимости от численного значения альтернативной ставки.

**8.** Инвестиционный проект требует 10 тыс. долл. и обещает доход в 10 800 долл. в конце периода. Предполагается, что нет никакой неопределенности и никаких налогов. Проект на 20% финансируется заемным капиталом под ставку 6%. Для оценки проекта используется ставка дисконтирования, превышающая стоимость капитала на 1%. На основании этих данных определите денежные потоки по проекту, а также заемного и акционерного капитала и заполните табл. 4.12.

Таблица 4.12

| Денежные потоки | Период | | *NPV*(7%) | *IRR* |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | | |
| По проекту | | | | |
| Заемного капитала | | | | |
| Акционерного капитала | | | | |

**9.** Акционеры согласились с предлагаемой длительностью $n = 4$ года проекта и с необходимым размером инвестиций $I = 10$ тыс., но требуют обеспечить большую доходность $j = 10\%$ вложения этих инвестиций, чем общепринятая ставка $i = 8\%$. Какой для этого нужно обеспечить минимальный ежегодный доход $R$?

**10.** Станок будет служить 3 года, принося ежегодный доход в 2 тыс. долл., и продается в конце срока по остаточной стоимости. Приобретение и монтаж станка обойдутся в 10 тыс. долл. Его остаточная стоимость к концу 3-го года составит 7 тыс. долл. Окупит ли фирма свои вложения за предполагаемый срок эксплуатации агрегата, если:

а) ставка процента составляет 8%;

б) ставка процента равна 15%;

в) ставка процента равна 8%, но предполагаемая инфляция составит 10% в год?

**11.** Для оценки инвестиционного проекта с капитальными начальными вложениями в размере 150 тыс. долл. компания АБВ применяет ставку дисконтирования 0,1. За каждый год в течение всего 10-летнего срока реализации проекта картина денежных доходов, тыс. долл., и расходов, тыс. долл., будет одной и той же (табл. 4.13).

Таблица 4.13

| Выручка | Переменные издержки | Постоянные издержки | Амортизация | Налоги |
|---|---|---|---|---|
| 375 | 300 | 30 | 15 | 15 |

Определить:

а) денежный поток по данному проекту;

б) чистую текущую стоимость проекта, его срок окупаемости и внутреннюю доходность.

**12.** Инвестор имеет плановый период, равный 6 годам. В течение этого срока эксплуатации инвестиционный объект порождает следующий поток платежей $\{E_t\}$.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_t$ | –1000 | 600 | 500 | 100 | 200 | 100 | 100 |

В этих платежах не учтена достижимая от ликвидации объекта выручка $\{L_t\}$, которая с течением времени постоянно сокращается.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_t$ | 1000 | 600 | 400 | 300 | 200 | 100 | 0 |

Найти оптимальный срок эксплуатации при условии, что за его пределами вложения могут осуществляться только под ставку дисконтирования $i = 10\%$.

**13.** Компания использует ставку дисконтирования 10%. Предположим, что ежегодные поступления одинаковы. Какой максимальный приемлемый простой («недисконтированный») срок окупаемости должно иметь приобретаемое оборудование с жизненным циклом 5 лет? Каким будет максимальный приемлемый простой срок окупаемости для жизненного цикла 10, 20 и 40 лет и бесконечно долгого жизненного цикла?

**14.** Для расширения ассортимента выпускаемой продукции предприятию требуется 800 млн руб. По истечении годичного срока освоения производства новой продукции она будет приносить ежегодно 300 млн руб. чистого дохода, и так в течение 5 лет. Требуется:

а) найти величину чистого дисконтированного дохода и внутренней нормы доходности по данному мероприятию при следующих источниках привлечения капитала:

- за счет собственных средств (СС) ;
- целиком на заемных средствах (ЗС): кредит берется под ставку 10% и его следует погасить в течение двух лет по схеме равных процентных выплат;
- с частичным самофинансированием (200 млн руб.) и по кредиту (600 млн руб.) на тех же условиях, что и в предыдущем пункте.

Расчеты выполнить для трех вариантов ставки сравнения: 10%; 8%; 15%;

б) на основании полученных числовых значений $NPV$ провести сравнительный анализ эффективности планируемого мероприятия в зависимости от величины коэффициента самофинансирования ( $\chi = \frac{CC}{(CC + ЗC)}$ ) и уровня альтернативной ставки ( $i$ );

в) согласно условию задачи выплата основного долга и процентов во 2-м году превышает величину чистого дохода. Откуда взять деньги на погашение?

**15.** Инвестиционный проект рассчитан на один год, требует 1000 долл. начальных вложений и дает в этом же году 1050 долл. чистых, до налога на прибыль, денежных поступлений (выручка – расходы кроме амортизации). Оценить целесообразность такой инвестиции, если цена капитала фирмы, не учитывающая налога на прибыль, составляет 6%, действующая ставка налога – 0,34, а амортизация за период начислена в сумме равной объему сделанных инвестиций.

**16.** Анализируются два альтернативных проекта

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| А | –100 | 50 | 70 | |
| Б | –100 | 30 | 40 | 60 |

Предполагая, что фирма может реинвестировать капитал в точно такие же проекты, сделать выбор при цене капитала $r = 10\%$.

## Аналитические задачи

**1.** Ожидается, что инвестиционный проект, требующий разовых вложений $I$, будет приносить одинаковый доход $E$ в течение всего своего жизненного цикла $n$. Для оценки инвестиций используется ставка дисконтирования $i$. Требуется:

а) доказать, что максимально приемлемый «недисконтированный» период окупаемости зависит от жизненного цикла проекта $n$ и стоимости денег во времени $i$ и совпадает по величине с коэффициентом приведения простой годовой ренты:

$$T_{\text{ок}}^{\max} = \alpha(n;i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i};$$

б) убедиться, что найденный показатель приводит в терминах «недисконтированного» периода окупаемости к тому же решению «принять или отклонить», что и критерий $NPV$.

**2.** Проект А рассчитан на $n$ лет и имеет характеристики $NPV_{\text{А}} = \alpha$, $IRR_{\text{А}} = \rho$. Проект В состоит в последовательной $k$-кратной реализации проекта А. Найти характеристики чистого приведенного дохода и внутренней нормы доходности проекта В.

**3.** Разрабатывается инвестиционный проект заданной продолжительности $n$ и требуется, чтобы срок его окупаемости (дисконтированный) совпадал с длительностью инвестиционного цикла. Проект должен обеспечивать требуемый годовой доход $R$. Найти необходимые начальные инвестиции $I$ и характеристики эффективности данного проекта, отвечающие ставке сравнения $i$.

**4.** Оборудование стоимостью $P$ сдается в аренду на $n$ лет. К концу этого срока его остаточная стоимость составит сумму $S$. Требуется:

а) найти величину минимально приемлемого для арендодателя размера годового арендного платежа $R_{\min}$, если в своих оценках он использует ставку сравнения $i$;

б) составить уравнение, из которого рассчитывается норма доходности ($IRR$) для арендодателя, если арендатор согласился на величину платежа $R > R_{\min}$;

в) записать формулу прироста ($\Delta$) внутренней нормы доходности в условиях п. «б» по сравнению с п. «а».

**5.** Предприятию для производственных нужд необходим актив стоимостью $P$ руб., который предполагается использовать в течение $T$ лет. Требуемую сумму $P$ можно получить в кредит под ставку $i$ на срок, равный периоду эксплуатации актива $T$. Для простоты предположим, что заем берется на $T$ лет на условиях его погашения равными процентами $\Pi = iP$. Стоимость этого актива будет списана в течение данного срока по прямолинейному методу.

С другой стороны, фирма может получить актив в аренду на $T$ лет, выплачивая в конце каждого года $\Lambda$ руб.

Согласно принятым правилам, лизинговые платежи $\Lambda$ и расходы на амортизацию $A$ вычитаются из налогооблагаемой прибыли. В предлагаемой задаче считается, что то же правило имеет место и относительно процентных выплат $\Pi$ (что не всегда соответствует российскому налоговому законодательству). Отнесение этих затрат на себестоимость, так называемый налоговый щит, снижает размер налогооблагаемой прибыли и дает налоговую экономию, которую необходимо учитывать в оценках денежных потоков для покупателя и в случае аренды.

Определить денежные потоки, необходимые для анализа целесообразности того или иного варианта при условии, что ставка налога на прибыль равна $\tau$.

**6.** Известный из финансового менеджмента эффект финансового рычага равен приросту рентабельности активов ($r_A$) благодаря привлечению заемного капитала (ЗК), несмотря на его платность ($r_{ЗК}$). Согласно этому свойству эффективность собственного капитала (ЭСК) при использовании заемного меняется в соответствии со следующей формулой:

$$\text{ЭСК} = r_{\text{А}} + (r_{\text{А}} - r_{\text{ЗК}})\frac{\text{ЗК}}{\text{СК}}.$$

Автором данного учебника получен аналог этого соотношения для инвестиционных проектов. Допустим, что проект финансируется частично за счет заемного капитала, т. е. инвестиции $I$ включает как собственные средства $I_{\text{СК}}$, так и заемные $I_{\text{ЗК}}$:

$$I = I_{\text{СК}} + I_{\text{ЗК}}.$$

Тогда рентабельность проекта по собственному капиталу отличается от рентабельности проекта по общему объему инвестиций на величину эффекта финансового рычага (ЭФР):

$$\frac{NPV_{\text{СК}}}{I_{\text{СК}}} = \frac{NPV_{\text{ПР}}}{I} + \left(\frac{NPV_{\text{ПР}}}{I} + \frac{NPV_{\text{ЗК}}}{I_{\text{ЗК}}}\right) \cdot \frac{I_{\text{ЗК}}}{I_{\text{СК}}}.$$

Требуется:

а) доказать эту формулу;

б) определить ЭФР при совпадении кредитной ставки со ставкой сравнения;

в) показать, что доказанная формула приводится к следующей зависимости между индексами рентабельности потоков по проекту и займу:

$$\frac{PV_{\text{СК}}}{I_{\text{СК}}} = \frac{PV_{\text{ПР}}}{I} + \left(\frac{PV_{\text{ПР}}}{I} - \frac{PV_{\text{ЗК}}}{I_{\text{ЗК}}}\right) \cdot \frac{I_{\text{ЗК}}}{I_{\text{СК}}},$$

где $PV_{\text{ПР}}$, $PV_{\text{ЗК}}$ – текущие стоимости потоков отдач и срочных уплат;

г) записать ограничение на допустимый объем заимствования $I_{\text{ЗК}}$ при следующих условиях:

- индекс рентабельности проекта превышает единицу;

• при действующих кредитных ставках дифференциал рычага отрицателен;

• минимально допустимый индекс рентабельности собственного капитала равен $d$.

**7.** Разрабатывается инвестиционный проект производства нового продукта. Его разработчики исходят из доступного для инвестиций объема финансирования $I$. Проект рассчитан на срок $n$. Руководство фирмы требует обеспечить доходность $j$ планируемых вложений. Определить:

а) какой для этого нужно обеспечить минимальный ежегодный доход $R$;

б) условие реализуемости проекта при следующих исходных данных: $p$, $c$ – цена и себестоимость одного изделия, $V$ – объем производства (шт.), $h$ – норма амортизации, $\eta$ – ставка налога на прибыль.

**8.** Продавец продал товар, получив в уплату несколько векселей (портфель векселей), каждый из которых выдан на сумму $V$. Сроки оплаты (погашения) этих векселей наступают через равные промежутки времени $p$ раз в год в течение $n$ лет. Продавец учитывает в банке все эти векселя одновременно сразу после их получения по простой учетной ставке $d$. Требуется:

а) найти сумму $Q$, которую выплатит банк, учитывая эти векселя;

б) опираясь на показатель $IRR$, составить уравнение для определения доходности этой финансовой операции для банка;

в) рассчитать доходность учета этих векселей, определяя ее годовой ставкой $i$ сложных процентов, начисляемых раз в год.

## Ситуационные задачи

**1.** Фирма, выпускающая спортивные товары, намеревается освоить производство нового тренажера. Емкость рынка тренажеров подобного типа оценивается в 1,1 млн ед., а доля фирмы прогнозируется на уровне 10%. Ожидается, что тренажер будет продаваться по цене 400 ден. ед., переменные издержки на одно изделие составят 360 ден. ед., а фиксированные затраты нового производства будут равны 2 млн ден. ед.

Определить поток наличности по проекту при следующих исходных данных:

• начальные инвестиции в оборудование $I = 17,6$ млн ден. ед.;

• норма амортизации – 0,1;

• суммарная налоговая нагрузка по отношению к прибыли – 50%;

• период отдачи от проекта – 10 лет;

а) найти характеристику *NPV* проекта при ставке дисконтирования $i = 6\%$. Какое решение примут менеджеры фирмы по данному проекту?

б) как должна измениться цена продажи тренажера, чтобы менеджеры приняли противоположное решение?

**2.** Предприниматель Кирилл Петров накопил 7000 долл., чтобы приобрести станок для производства бирюлек. Ежегодные денежные выгоды от его использования одинаковы и равны 1000 долл. В качестве альтернативы им рассматривается валютный депозит под годовую ставку 6%. Сколько полных лет должен составлять жизненный цикл этого станка, чтобы его приобретение было по крайней мере приемлемым?

В студенчестве Петров успешно решал задачи по оценке инвестиций, в том числе и такие, как расчетная задача 10 и аналитическая 1. Чтобы получить ответ на интересующий его вопрос, Петров руководствуется показателем максимально приемлемого периода окупаемости из аналитической задачи 1.

**3.** Действующий универмаг будет продолжать неограниченно долго приносить 200 тыс. долл. ежегодного дохода. Новый, модернизированный универмаг, построенный вместо старого, обойдется в 1 млн долл. и, как ожидается, будет стоять вечно и давать 25% прибыли. Следует ли принимать этот проект, если стоимость денег для инвестора 10%?

Примечание. Решить задачу двумя способами: а) на основе сравнения двух вариантов: «с проектом – без проекта»; б) на основе анализа относительного денежного потока (денежные потоки от нового универмага минус потоки от старого универмага).

**4.** Компания «Домстрой» собирается вложить 15,552 млн долл. в строительство жилого дома. У нее имеются два проекта: А и Б. По проекту А дом строится в две очереди, первая очередь даст за 1-й год 10 млн долл. дохода. В течение 2-го года строится вторая очередь, затраты на которую равны доходам от первой очереди. В конце 3-го года инвестор получит 10 млн долл. дохода. По проекту Б сразу строятся обе очереди дома и доход инвестор получит только в начале 4-го года в размере 22,1 млн долл. Определить:

а) денежные потоки по проектам А и Б. Вычислить *NPV* каждого из них при $r = 0\%$, $r = 5\%$, $r = 10\%$, $r = 20\%$. При каких значениях $r$ компании следует предпочесть проект А, при каких – проект Б?

б) величину ставки $r$, при которой проекты, сравниваемые по критерию *NPV*, равно выгодны;

в) *IRR* каждого проекта;

г) какой из этих проектов выгоднее в точке Фишера.

**5.** Компания с капитальным бюджетом 490 тыс. долл. формирует программу капитальных вложений. Допустим, что цена капитала компании (ставка сравнения) равна 10%. Числовые характеристики имеющихся независимых проектов приведены в табл. 4.14.

Таблица 4.14

| Проект | Требуемые инвестиции, долл. | Приведенная стоимость потока отдач, долл. | Внутренняя доходность, % *IRR* |
|---|---|---|---|
| A | 50000 | 116000 | 20 |
| B | 120000 | 183000 | 18 |
| C | 110000 | 147000 | 16 |
| D | 100000 | 126000 | 15 |
| E | 130000 | 171000 | 14 |
| F | 90000 | 103000 | 12 |
| G | 80000 | 66000 | 8 |

Требуется:

а) исключить заведомо непригодные проекты;

б) решить задачу отбора наилучшей из оставшихся проектов группы методом ранжирования инвестиций с помощью внутренней нормы доходности (*IRR*);

в) отобрать наилучшую группу проектов, применяя для их ранжирования показатель чистой текущей стоимости (*NPV*);

г) воспользоваться оптимизационным подходом. Для этого построить модель оптимального по критерию *NPV* выбора в виде задачи двоичного линейного программирования и решить ее;

д ) сравнить решения, полученные разными способами.

**6.** Компания имеет земельный участок, рыночная стоимость которого оценивается в 45 млн руб. На этом участке в течение года может быть построена гостиница. В первый год ее эксплуатации будет получена прибыль в 4 млн руб.; в течение последующих 3 лет ожидается рост прибыли на 2 млн руб. ежегодно, а в дальнейшем она меняться не будет. Затраты на сооружение и ввод гостиницы составляют 10 млн руб.; ставка кредита – 12% (собственных свободных капиталов компания не имеет), и он может быть предоставлен на срок не более 4 лет. Руководство компании рассматривает два возможных варианта использования земельного участка: его продажу или строительство и эксплуатацию гостиницы в течение 20 лет. Какой из них будет выбран, если ставка процента по альтернативному вложению равна 10%?

**7.** Фирма «Евро уют» намерена инвестировать 15 млн руб. (15000 тыс. руб.) в оборудование и производить строительные материалы, которые в настоящее время пользуются повышенным спросом. Срок эксплуатации данного оборудования – 4 года; износ на него начисляется по методу равномерной (линейной) амортизации с нормой 25% в год. Выручка от реализации продукции прогнозируется в 1-м году – 7,2 млн долл. (72000 тыс. руб.), последующий ежегодный прирост составляет 5, 12 и 5% соответственно. Текущие расходы по годам оцениваются следующим образом: 2 млн долл. (2000 тыс. руб.) в 1-й год эксплуатации с последующим ежегодным ростом на 7, 5, 8% соответственно. Ставка налога на прибыль составляет 24%, а цена капитала – 15%. Требуется оценить выгодность планируемого мероприятия и представить результаты в виде табл. 4.15.

Таблица 4.15

| Показатель | Год | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й |
| Объем реализации | | 7200 | | | |
| Текущие расходы | | 2000 | | | |
| Амортизация | | | | | |
| Налогооблагаемая прибыль | | | | | |
| Чистая прибыль | | | | | |
| Денежный поток по проекту | | | | | |
| Критерии оценки проекта | *NPV* | $T_{ок}$ | *PI* | *IRR* | |

**8.** Компании «Модуль» для производственных нужд необходимо оборудование стоимостью 3 млн руб. Это оборудование будет служить только 5 лет перед отправкой его на свалку. Необходимую для покупки сумму можно занять до окончания срока эксплуатации требуемого актива под 10% годовых.

Согласно требованиям банка заем должен быть погашен равными процентами с выплатой основного долга в конце 5-го года. Тем временем представитель производителя указала, что они могут сдать оборудование в финансовый лизинг на условиях пяти равных платежей по 825000 руб. в конце каждого года. Фирма платит налог на прибыль по ставке 24% и начисляет износ на оборудование по методу линейной амортизации. Менеджер фирмы должен принять решение, как поступить: взять кредит и купить оборудование или арендовать. Для определения более выгодного варианта он рассчитал оценки денежных потоков в случае покупки и лизинга и выбрал более дешевый вариант.

Чему равны эти оценки и какое решение принял менеджер?

Примечание. Принципиально важной здесь является величина ставки сравнения. Учитывая, что оплата процентов по ссуде снижает налогооблагаемую прибыль, в качестве альтернативной ставки можно принять кредитный процент, скорректированный на величину налоговой ставки: $10\%(1 - 0,24) = 7,6\%$.

**9.** Предприятие «Дютем» собирает редукторы. В настоящее время его генеральный директор пытается решить вопросы технического развития и рассматривает целесообразность приобретения новой технологической линии. На рынке имеются две модели со следующими параметрами (табл. 4.16).

Таблица 4.16

| Параметр | Модель 1 | Модель 2 |
|---|---|---|
| Цена, тыс. долл. | 9500 | 13000 |
| Годовой доход, тыс. долл. | 2100 | 2250 |
| Срок эксплуатации | 8 лет | 12 лет |
| Ликвидационная стоимость, тыс. долл. | 500 | 800 |
| Требуемая норма прибыли, % | 11 | 11 |

Обосновать целесообразность приобретения той или иной технологической линии.

**10.** Коммерческой организации «Спектр» представлены два варианта приобретения нового оборудования, которые характеризуются следующими показателями (табл. 4.17).

Таблица 4.17

| Показатель | Вариант 1 | Вариант 2 |
|---|---|---|
| Единовременные капитальные вложения, тыс. руб. | 4310 | 5310 |
| Текущие затраты (расходы на электроэнергию, техническое обслуживание и эксплуатацию оборудования), тыс. руб. | 3240 | 5728 |
| Производительность оборудования, шт./смену | 13 | 22 |

Принятый в этой организации норматив эффективности капиталовложений установлен на уровне 15%. Требуется выбрать наиболее экономичный вариант вложения средств.

## ТЕСТЫ

**1.** Промышленная компания по производству подъемного оборудования решила построить новый цех для выпуска малых подъемников. С учетом прогнозируемого спроса годовой объем производства планируется на уровне 5000 подъемников, а требуемые инвестиции – 500 тыс. ден. ед. Себестоимость одного подъемника оценивается в 5 ден. ед. Допустим для простоты, что компания освобождена от налогов. Считая, что оборудование служит вечно, а условия производства меняться не будут, найдите конкурентную цену за единицу выпускаемого оборудования при условии, что альтернативная стоимость капитала – 10%:

1) 5 ден. ед.;
2) 10 ден. ед.;
3) 15 ден. ед.;
4) 13 ден. ед.

**2.** Фирма рассматривает возможность покупки станка за 100 тыс. ден. ед. Станок имеет 5-летний срок службы, после этого он не имеет ценности даже в качестве металлолома. Президент компании ожидает, что внедрение станка увеличит чистый годовой доход компании на 20 тыс. ден. ед. в течение всего срока его службы. Вы посоветовали бы покупать станок, если процентная ставка находится:

1) между 7 и 10%;

2) между 3 и 7%;

3) между 3 и 1%;

4) равна 0?

**3.** Сегодняшняя ценность (приведенная стоимость) инвестиционного проекта – это:

1) сумма, которая, будучи помещена в банк, вырастет за определенный период до искомой величины;

2) сумма чистых поступлений по проекту;

3) сумма приведенных к настоящему времени будущих чистых доходов;

4) сумма инвестиций по проекту;

5) сумма приведенных к настоящему времени оттоков денежных средств (инвестиций).

**4.** При оценке инвестиционного проекта по показателю чистой приведенной стоимости поток денежных средств от основной деятельности принимается в расчет:

1) по выручке от реализации;

2) по прибыли без налога на прибыль с учетом амортизационных отчислений;

3) по прибыли за вычетом налога на прибыль;

4) по прибыли без налога на прибыль с учетом изменения величины рабочего капитала (собственных оборотных средств) против предыдущего года.

**5.** Ставку процента в формуле чистой приведенной стоимости инвестиционного проекта обычно называют:

1) предельными издержками;

2) текущими издержками;

3) инвестиционными издержками;

4) альтернативными издержками;

5) издержками риска.

**6.** Фирма в прошлом году израсходовала 20 млн руб. на сооружение нового корпуса, 6 млн – на закупку сырья и материалов в будущем корпусе, 8 млн – на капитальный ремонт старых корпусов. Каков был у этой фирмы объем инвестиций? Выберите правильный ответ:

1) 34;

2) 20;

3) 28;

4) 26.

**7.** Проекты Λ и Ω предусматривают одинаковые расходы и имеют одинаковую внутреннюю норму доходности, которая превышает альтернативные издержки. Потоки денежных средств у проекта Λ больше потоков денежных средств проекта Ω, но возникают позже. Какой из проектов имеет более высокую чистую приведенную стоимость? Выберите правильный ответ:

1) Λ;

2) Ω;

3) приведенные стоимости совпадают;

4) исходной информации для однозначного ответа недостаточно.

**8.** Фирма предполагает взять банковскую ссуду на строительство нового предприятия. Годовая ставка процента составляет 18%, ожидаемая норма прибыли определена в 20%. При этих условиях фирма:

1) не будет строить новое предприятие;

2) будет строить новое предприятие;

3) несмотря на убыток, решит строить предприятие;

4) не сможет принять решение на основе имеющейся информации;

5) такая ситуация не может иметь места.

**9.** Решая вопрос об инвестициях, фирмы принимают во внимание:

1) номинальную процентную ставку;

2) реальную процентную ставку;

3) номинальную процентную ставку за вычетом реальной ставки процента;

4) только другие, не указанные выше факторы;

5) реальную ставку процента за вычетом номинальной.

**10.** Для оценки инвестиционного проекта применяют ставку дисконтирования, равную кредитной ставке, и не учитывают налогов (пусть наш инвестор их не платит). Как изменится показатель чистой приведенной стоимости проекта (*NPV*) при переходе от 100%-го инвестирования собственного капитала ($I$ = СК) к частичному или полному финансированию проекта заемным капиталом ($I$ = СК + ЗК, ЗК > 0)? Выберите правильный ответ:

1) возрастет;

2) снизится;

3) не изменится;

4) для ответа требуются дополнительные сведения.

**11.** *NPV* денежного потока по проекту положительна при ставке дисконтирования *i*, равной проценту по заемному капиталу. Применяемая кредитная ставка меньше, чем ставка сравнения *i*. Это означает, что:

1) *NPV* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу меньше *NPV* денежных потоков по проекту;

2) *NPV* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу больше *NPV* денежных потоков по проекту;

3) *IRR* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу больше *IRR* денежного потока по проекту;

4) *IRR* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу меньше *IRR* денежного потока по проекту.

**12.** Имеется два инвестиционных проекта на 4 года с объемом первоначальных инвестиций 1000 тыс. руб. каждый. Распределение чистых доходов, тыс. руб., от проектов по годам выглядит следующим образом.

| Проект | Год | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й |
| А | 500 | 500 | 500 | 500 |
| Б | 100 | 300 | 500 | 1100 |

Какой из проектов выгоднее для инвестора:

1) проект А;

2) проект Б;

3) одинаковы.

**13.** Анализируемый по ставке сравнения *i* проект имеет нулевую оценку чистого дисконтированного дохода ($NPV = 0$). В этом случае:

1) внутренняя норма доходности больше, чем ставка сравнения ($IRR > i$);

2) ставка сравнения и внутренняя норма доходности одинаковы;

3) проект не окупится;

4) длительность проекта превышает срок его окупаемости;

5) индекс рентабельности проекта равен единице;

6) проект следует отвергнуть;

7) для принятия решения об инвестировании в проект нужна дополнительная информация.

**14.** Компания «Домстрой» собирается вложить 15,552 млн долл. в строительство жилого дома. У нее имеются два проекта: А и Б. По проекту А дом строится в две очереди: первая очередь даст за 1-й год 10 млн долл. дохода. В течение 2-го года строится вторая очередь, затраты на которую равны доходам от первой очереди. В 3-м году инвестор получит 10 млн долл. дохода. По проекту Б сразу строятся обе очереди дома и доход инвестор получит только в 3-м году в размере 22,1 млн долл. Как зависит выбор варианта от применяемой ставки дисконтирования $r = 5\%$ или $r = 10\%$ и используемых оценок: *NPV* и *IRR*.

1) при значении $r = 5\%$ компании следует предпочесть проект Б;

2) при значении $r = 10\%$ следует выбрать А;

3) проект А выгоднее Б независимо от ставки $r = 5\%$ или $r = 10\%$;

4) при значении $r = 10\%$ выбор не зависит от используемого критерия;

5) при значении $r = 5\%$ проект А доминирует по обоим критериям;

6) при значении $r = 10\%$ оценки NPV и IRR согласованны.

**15.** Оценить уровень эффективности проекта с двухлетним сроком реализации, если инвестиционные затраты составляют 590 тыс. руб., дисконтная ставка – 10%, величина чистого денежного потока за 1-й год – 220 тыс. руб., за 2-й год – 484 тыс. руб.:

1) убыточный проект;

2) проект с низким уровнем эффективности;

3) проект с высоким уровнем эффективности.

**16.** Допустим, что начало реализации проекта «депозитного типа» откладывается на 1 год. Как изменятся его характеристики *NPV*, *IRR* и рентабельности (*P*), оцениваемые по отношению к текущей дате:

1) не изменятся;

2) уменьшатся;

3) *NPV*, *IRR* уменьшатся, рентабельность возрастет;

4) *NPV* станет меньше, *IRR* и рентабельность не изменятся.

## Ответы и решения

### Расчетные задачи

**1.** Согласно содержанию задачи, предприятие, выбирая вариант А, может реинвестировать получаемый по этому варианту доход в повторное приобретение того же самого оборудования. Рассматривая первый проект как повторяющийся, придем к следующему потоку $\tilde{A}$ за три года: (0,–10), (1,2), (2,2), (3,12) с величиной $NPV_{\tilde{A}} = 3{,}09$. Для проекта Б показатель $NPV_{Б} = 2{,}88$. Так как $NPV_{\tilde{A}} > NPV_{Б}$, то выгоднее покупать оборудование А, несмотря на то, что $NPV_{А} = 1{,}11 <$ $< NPV_{Б} = 2{,}88$.

**2.** $NPV_{А} \approx 114$, $IRR_{А} \approx 0{,}24$, $P_{А} = 0{,}53$, проект А окупается в течение 6-го года; $NPV_{Б} \approx 126$, $IRR_{Б} \approx 0{,}22$, $P_{Б} = 0{,}56$, проект Б окупается в течение 6-го года. При принятой ставке дисконтирования сравниваемые варианты почти равноценны, там не менее проект Б предпочтительнее (он лучше по двум критериям: NPV и рентабельности).

**3.** а) $NPV = 97$ ден. ед.; б) $IRR = 19{,}52\%$.

**4.** Чтобы упростить расчеты, применим метод бесконечного цепного повтора сравниваемых проектов А и Б , что не повлияет на результаты сравнения. На каждом периоде повторяемый проект заменим одним платежом в начале периода, равным характеристике $NPV$ однократного проекта. В результате придем к сравнению двух бессрочных аннуитетов пренумерандо с платежами $NPV$(А) = 178,443, соответственно $NPV$(Б) = 176,380 и периодами (временными интервалами между соседними платежами) $T_{А} = 5$ и $T_{Б} = 6$. Сопоставим эти аннуитеты по показателю современной величины, которая равна суммарному $NPV$ повторяющегося потока. Для аннуитета пренумерандо периодичности $r$ и платежом $R$ при годовой ставке сложного процента $i$ современная величина определяется формулой

$$A = \frac{R(1+i)^r}{(1+i)^r - 1}$$

(см. ответ – решение аналитической задачи 3 в разд. 2).

Отсюда для повторяющихся проектов будем иметь:

$$NPV(\tilde{А}) = \frac{178{,}44}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \approx 460{,}17; \quad NPV(\tilde{Б}) = \frac{176{,}38}{1-(1+0{,}1)^{-6}} \approx 465{,}29.$$

Вычисляя в Excel, найдем $IRR$(А) = 31,32%; $IRR$(Б) = 25,27%. Отсюда следует, что проект А лучше по внутренней норме доходности, но хуже, если устранить временную несопоставимость проектов, по показателю чистого приведенного дохода: 460,17 < 465,29.

**5.** $NPV = 15\,000$ долл.; рентабельность – 150%; $IRR = 20\%$; статический показатель срока окупаемости $T_{ок}^{стат} = (10000/2000) = 5$ лет; с учетом дисконтирования вложение окупится через 7 лет, что превышает статический показатель на 2 года.

**6.** $NPV = 24{,}45$; $IRR = 17{,}72\%$.

**7.** Если $0 < r < 17{,}5\%$, то оба проекта приемлемы, но проект Б предпочтительнее; если $17{,}5\% \le r \le 44{,}5\%$, то оба проекта приемлемы, однако предпочтительнее уже проект А; если $r > 44{,}5\%$, то проект А все еще приемлем, а проект Б должен быть отвергнут.

Примечание. Для решения необходимо найти точку Фишера.

**8.** Решению соответствует табл. 4.18.

Таблица 4.18

| Денежные потоки | Период | | NPV (7%) | IRR, % |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | | |
| По проекту | –10000 | 10800 | 93,46 | 8 |
| Заемного капитала | 2000 | –2120 | 18,69 | 6 |
| Акционерного капитала | –8000 | 8680 | 112,15 | 8,5 |

**9.** $R_{\min} \approx 3154{,}7$.

**10.** а) окупит; б) не окупит; в) не окупит.

**11.** $I_0 = 150$, $E_i = 30$, $i = 1, 2, ..., 10$; $NPV \approx 34{,}3$; $IRR = 15{,}1\%$; с учетом дисконтирования проект окупается в течение 7-го года реализации.

**12.** Выгодной является эксплуатация инвестиционного объекта в течение 4 лет.

**13.** Для расчетов воспользуйтесь формулой, которая доказана в ответе к аналитической задаче 1.

| Продолжительность проекта, $n$, лет | 5 | 10 | 20 | 40 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| Максимально приемлемый срок окупаемости, $T_{ок}^{max}$, лет | 3,79 | 6,14 | 8,51 | 9,78 | 10 |

**14.** а) ответы по данному пункту содержатся в приводимой ниже табл. 4.19.

Таблица 4.19

| χ | Чистый дисконтированный доход, млн руб., $i$ | | | Внутренняя норма доходности |
|---|---|---|---|---|
| | 10% | 8% | 15% | |
| 1 | 337,24 | 397,81 | 205,65 | 25,4% |
| 0 | 337,24 | 369,28 | 270,67 | ∞ |
| 0,25 | 337,24 | 376,41 | 254,42 | 28,8% |

Для нулевого значения $\chi$ внутренняя норма доходности не определена: нет капиталовложений. Поскольку в этом случае уравнение для $IRR_{СК}$ всегда имеет нулевой корень $x = 1/(1 + IRR_{СК}) = 0$, можно считать, что показатель $IRR_{СК}$ денежных потоков по собственному капиталу равен бесконечности;

б) если только $NPV_{СК} > 0$ при ставке дисконтирования, равной проценту по заемному капиталу, то внутреннюю норму доходности можно увеличить, используя еще больше заемного капитала. То же относится и к $NPV_{СК}$, но уже при условии, что ставка дисконтирования больше кредитной, если меньше, будет наоборот;

в) данный вопрос не предусматривает однозначного ответа и носит дискуссионный характер.

Примечание. Мероприятие не следует оценивать характеристиками денежного потока по вложению собственных средств ($NPV_{СК}$, $IRR_{СК}$).

**15.** За ставку сравнения следует принять цену капитала после уплаты налога:

$i = (1 - 0{,}34) \cdot 6\% = 3{,}96\% = 0{,}0396.$

Денежный доход по проекту после уплаты налогов:

$$E_1 = (1 - 0{,}34)(1050 - 1000) + 1000 = 1033$$

или

$$E_1 = (1 - 0{,}34) \cdot 1050 + 0{,}34 \cdot 1000,$$

где $0{,}34 \cdot 1000 = 340$ – налоговая льгота по амортизации. Преобразовав исходный денежный поток к посленалоговому виду (–1000; 1033), найдем его $NPV = -6{,}35 < 0$; $IRR = 3{,}3\% < 3{,}96\%$. От проекта следует отказаться.

**16.** Для решения следует сравнить расширенные проекты $\hat{A}$, $\hat{Б}$, отвечающие трех- и двукратному повторению базовых вариантов А и Б:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{A}$ | –100 | 50 | –30 | 50 | –30 | 50 | 70 |
| $\hat{Б}$ | –100 | 30 | 40 | –40 | 30 | 40 | 60 |

$NPV_{\hat{A}} \approx 8{,}3$, $NPV_{\hat{Б}} \approx 9{,}5$. Таким образом, при возможности повторных инвестиций в пределах общего 6-летнего срока следует выбрать проект Б. Тот же ответ можно получить, сравнив по величине текущей стоимости два аннуитета: с тремя платежами $NPV_А = 3{,}3$ в начале каждого двухлетнего периода и соответственно двумя платежами $NPV_Б =$

$= 5,4$, через 3 года. Очевидно, что для первой ренты ставка приведения $j_1 = (1 + 0,1)^2 - 1 = 0,21$, а для второй $- j_2 = (1 + 0,1)^3 - 1 = 0,33$.

### Аналитические задачи

**1.** а) проект можно принять, если показатель его $NPV \geq 0$. Отсюда согласно условиям задачи

$$-I + E \cdot \alpha(n; i) \geq 0.$$

Преобразовывая, получим: $I/E \leq \alpha(n; i) = (1 - (1 + i)^{-n})/I$, и согласно определению простого периода окупаемости будем иметь $T_{ок} = I/E \leq T_{ок}{}^{max} = \alpha(n; i)$. б) Допустим, что расчетное значение простого периода окупаемости превышает величину $\alpha(n; i)$. Из доказательства в п. «а» вытекает, что чистый приведенный доход такого проекта отрицателен и его следует отвергнуть.

**2.** $NPV_B = \alpha \cdot \dfrac{(1-\gamma^{nk})}{(1-\gamma^n)}$, $\gamma = \dfrac{1}{(1+i)}$; $IRR_B = \rho$.

**3.** $I = R \cdot \alpha(n, i)$, $NPV = 0$, $NFV = 0$, $IRR = i$, $T_{ок} = n$, показатели доходности: рентабельность $P$ и индекс рентабельности $PI$ равны 0 и соответственно 1.

**4.** а) $R_{min} = [\text{P} - S/(1 + i)^n]/\alpha(n; i)$ (сдача оборудования в аренду является своеобразным инвестиционным процессом с капитальными затратами в натурально-вещественной форме и доходами в виде арендных поступлений); б) $R \cdot \alpha(n, IRR) = \text{P} - S/(1 + IRR)^n$; в) $\Delta = IRR - i$.

**5.** Отдача для варианта покупки:

$$E_t = E^{(n)} = (1 - \tau)(D - C) + \tau\text{A} + \tau\Pi - \Pi,\ t = 1, 2, ..., T - 1;\ E_T = E - P,$$

а в случае лизинга:

$$E_t = E^{(л)} = (1 - \tau)(D - C) + \tau\Lambda - \Lambda,$$

где $D$, $C$ – доход и связанные с его получением затраты.

В обоих случаях результаты использования актива $(D - C)$ одинаковы. Это позволяет задачу выбора свести к сравнению потоков затрат, связанных со способом финансирования:

$$Z_t = (1 - \tau)\,\Pi - \tau\text{A},\ t = 1, 2, ..., T - 1;\ Z_T = (1 - \tau)\,\Pi - \tau\text{A} + \text{P}$$

– для покупки и $З_t = (1 - \tau)\Lambda$, $t = 1, 2, ..., T$ – для аренды.

Если современная величина первого потока будет меньше ($PV_{\text{покупка}} < PV_{\text{лиз}}$), то имущество необходимо купить, в противном случае – арендовать.

**6.** а) доказательство следует из формулы (4.13) и следующей цепочки преобразований:

$$\frac{NPV_{\text{СК}}}{I_{\text{СК}}} = \frac{NPV_{\text{ПР}}}{I} \cdot \frac{(I_{\text{ЗК}} + I_{\text{СК}})}{I_{CR}} + \frac{NPV_{\text{ЗК}}}{I_{\text{ЗК}}} \cdot \frac{I_{\text{ЗК}}}{I_{\text{СК}}} =$$

$$= \frac{NPV_{\text{ПР}}}{I} + \left( \frac{NPV_{\text{ПР}}}{I} + \frac{NPV_{\text{ЗК}}}{I_{\text{ЗК}}} \right) \cdot \frac{I_{\text{ЗК}}}{I_{CR}}.$$

Согласно принятой терминологии отношение $I_{\text{ЗК}}/I_{\text{СК}}$ – плечо рычага, а ($NPV_{\text{ПР}}/I + NPV_{\text{ЗК}}/I_{\text{ЗК}}$) – его дифференциал;

б) ЭФР = $(NPV_{\text{ПР}}/I) \cdot (I_{\text{ЗК}}/I_{\text{СК}})$.

в) вывод основан на следующих соотношениях:

- $NPV_{\text{ПР}} = - I + PV_{\text{ПР}}$;
- $NPV_{\text{ЗК}} = - I_{\text{ЗК}} + PV_{\text{ЗК}}$;
- $NPV_{\text{СК}} = NPV_{\text{ПР}} + NPV_{\text{ЗК}}$;

г) $$\frac{PV_{\text{ПР}}}{I} + \left( \frac{PV_{\text{ПР}}}{I} - \frac{PV_{\text{ЗК}}}{I_{\text{ЗК}}} \right) \cdot \frac{I_{\text{ЗК}}}{I_{\text{СК}}} \ge d.$$

**7.** а) $R = I/\alpha(n; j) = j \cdot I/[1 - (1 + j)^{-n}]$; б) $(1 - \eta) \cdot (pV - cV - hI) + hI \ge R$.

**8.** а) пронумеруем векселя в порядке очередности их погашения: $m = 1, 2, \ldots, np$. За вексель $k$, погашаемый через $k/p$ часть года, банк выплачивает сумму $Q_k = V(1 - kd/p)$. Выплачиваемая банком за весь портфель векселей сумма составит:

$$Q = \sum_{k=1}^{np} Q_k = V \sum_{k=1}^{np} (1 - \frac{kd}{p}) = V(np - \frac{d}{p} \cdot \sum_{k=1}^{np} k) =$$

$$= Vnp(1 - \frac{d}{p} \cdot \frac{1 + np}{2});$$

б) погашая эти векселя, банк получает $p$-срочную постоянную ренту постнумерандо длительности $n$ с платежом $V$. Рассматривая эти поступления и затраты $Q$ в терминах инвестиционного проекта, придем к следующему уравнению для отыскания внутренней нормы доходности с периодом начисления $1/p$:

$$-Q + V \cdot \sum_{k=1}^{np} (1 + IRR)^{-k} = 0.$$

Для достаточно больших значений $np$ можно воспользоваться приближенным равенством:

$$-Q + V / IRR = 0.$$

Откуда $IRR \approx V/Q$, и для годовой доходности будем иметь $i_{\text{год}} = pV/q$ для простого процента и $r_{ef} = (1 + V/q)^p - 1$ в случае сложных процентов;

в) текущая стоимость получаемой банком $p$-срочной ренты с ежегодным начислением процентов составляет:

$$A = V \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}.$$

Приравнивая ее выплате $Q$, получим уравнение для определения доходности $i$.

## Ситуационные задачи

**1.** а) для удобства решения данной задачи полезно заполнить таблицу (жирный шрифт) (табл. 4.20).

$NPV(6\%) = -2{,}291$ млн ден. ед. Менеджеры отклонят проект;

Таблица 4.20

| № п/п | Показатель | Год | |
|---|---|---|---|
| | | 0-й | 1 – 10-й |
| 1 | Инвестиции | 17600000 | |
| 2 | Доход | **44000000** (44) | |
| 3 | Переменные издержки | **39600000** (39,6) | |
| 4 | Фиксированные издержки | 2000000 (2) | |
| 5 | Амортизация | **1760000** (1,76) | |
| 6 | Прибыль до налогов (стр. 1 – стр. 2– | | |
| 7 | – стр. 3 – стр. 4) | **640000** (0,64) | |
| 8 | Налоги | **320000** (0,32) | |
| 9 | Чистая прибыль (стр. 5 – стр. 6) | **320000** (0,32) | |
| | Поток отдач (стр. 4 + стр. 7) | **2080000** (2,08) | |
| | Денежный поток по проекту | – 17,6 | 2,08 |

б) условие целесообразности проекта в зависимости от уровня цены $p$ имеет следующий вид:

$$55p \cdot \alpha(10;\ 6\%) - 19920 \cdot \alpha(10;\ 6\%) \geq 17600.$$

Откуда следует, что при $p \geq 406$ ден. ед. проект становится выгодным.

**2.** Для определения неизвестного периода воспользуемся неравенством $\alpha(x;\ 6\%) \geq 7$. Откуда $x \geq 9{,}35$, и, следовательно, срок эксплуатации этого станка должен составлять, по крайней мере, 10 лет; тогда его приобретение целесообразно.

**3.** а) $TC$(действующий) = 2 млн долл. > $TC$(новый) = $NPV$(новый) = = 1,5 млн долл. Вывод – не строить;

б) относительный денежный поток: –1 млн долл., 50 тыс. долл., неограниченно долго; $NPV$(новый – старый) = –500 тыс. долл., следовательно, строительство нового универмага – неприемлемый инвестиционный проект.

**4.** а) решение соответствует табл. 4.21;

Таблица 4.21

| Проекты | Год | | | | Чистый приведенный доход, тыс. долл. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | $NPV$(0%) | $NPV$(5%) | $NPV$ (10%) | $NPV$ (20%) |
| А | –5552 | 10000<br>–10000 | 0 | 10000 | 4448 | 3086,38 | **1961,15** | **235,04** |
| Б | –15552 | 0 | 0 | 22100 | **6548** | **3538,81** | 1052,06 | –2762,65 |

б) проекты равно выгодны по $NPV$ при $r \approx 6{,}56\%$;

в) $IRR_А = 21{,}67\%$, $IRR_Б = 12{,}43\%$;

г) в точке Фишера проект А выгоднее, чем проект Б.

**5.** а) проект $G$ следует исключить из множества допустимых вариантов: $NPV(G) = -14000$, $IRR(G) = 8\%$ < цены капитала = 10%;

б), в), г) таблица результатов отбора разными способами (вошедшие в программу проекты выделены жирным шрифтом (табл. 4.22);

Таблица 4.22

| Проект | $IRR$ (п. «б»), % | $NPV$ (п. «в») | Оптимизация (п. «г») |
|---|---|---|---|
| A | **20** | **66000** | **A** |
| B | **18** | **63000** | **B** |
| C | **16** | **37000** | C |
| D | **15** | 26000 | **D** |
| E | 14 | **41000** | **E** |
| F | **12** | 13000 | **F** |

д) сравним решения по показателю *NPV*, остатку ресурсов и значениям рентабельности (табл. 4.23).

Таблица 4.23

| Показатель | п. «б» | п. «в» | п. «г» |
|---|---|---|---|
| *NPV* программы | 205000 | 207000 | 209000 |
| Остаток капитала | 20000 | 80000 | нулевой |
| Рентабельность программы, % | 43,6 | 50,4 | 42,6 |

Пусть остаток капитала инвестируется под ставку 10%, совпадающую с ценой капитала. *NPV* такого вложения равен нулю. Естественно считать, что подобное мероприятие входит в программу инвестирования. Тогда для пунктов «б» и «в» рентабельности будут равны 41,8 и 42,2% соответственно. Отсюда вытекает, что оптимизация дает наилучший вариант как по *NPV*, так и по рентабельности.

**6.** Составим таблицу денежных потоков (табл. 4.24).

Таблица 4.24

| Денежные потоки | Год | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5–20-й |
| Проект | –10 | 0 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| Кредит | 10 | 0 | 4 | 6 | 3,9976 | 0 |
| Результирующий | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,0024 | 10 |

Приведенная стоимость (ПС) чистых поступлений (проект – кредит) получается дисконтированием результирующего потока по ставке 0,1 : $ПС = 80{,}2155 \cdot 1{,}1^{-3} = 60{,}267$. Эта сумма превышает стоимость участка на 15,267 млн руб., поэтому следует выбрать строительство гостиницы.

**7.** Проект можно принять (табл. 4.25).

**8.** В ответе аналитической задачи 5 показано, что для выбора между покупкой и арендой необходимо сравнить затраты по каждому варианту с учетом налоговой экономии на амортизации, выплате процентов и лизинговых платежах (табл. 4.26).

Таблица 4.25

| Показатель | Год | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0-й | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й |
| Объем реализации | | 7200 | 7560 | 8467,2 | 8890,56 |
| Текущие расходы | | 2000 | 2140 | 2247 | 2426,76 |
| Амортизация | | 3750 | 3750 | 3750 | 3750 |
| Налогооблагаемая прибыль | | 1450 | 1670 | 2470,2 | 2713,8 |
| Чистая прибыль | | 1102 | 1269,2 | 1877,352 | 2062,488 |
| Денежный поток по проекту | –15000 | 4852 | 5019,2 | 5627,352 | 5812,488 |
| Критерии оценки проекта | *NPV* 37,751 | $T_{ок}$ Проект окупится в течение 4-го года | | *PI* 1,0025 | *IRR* 15,12% |

Таблица 4.26

| Данные | Год | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й |
| Для анализа целесообразности покупки: затраты на выплату процентов | –300000 | –300000 | –300000 | –300000 | –300000 |
| налоговая экономия при выплате процентов | 72000 | 72000 | 72000 | 72000 | 72000 |
| сумма к погашению | | | | | –3000000 |
| налоговая экономия на амортизации | 144000 | 144000 | 144000 | 144000 | 144000 |
| суммарный денежный поток | –84000 | –84000 | –84000 | –84000 | –3084000 |
| Для анализа целесообразности лизинга: лизинговые платежи | –825000 | –825000 | –825000 | –825000 | –825000 |
| налоговая экономия при выплате аренды | 198000 | 198000 | 198000 | 198000 | 198000 |
| суммарный денежный поток | –627000 | –627000 | –627000 | –627000 | –627000 |

$PV_{пок} = 2418936{,}972$ руб., $PV_{лиз} = 2530045{,}266$. Поскольку $PV_{пок} < < PV_{лиз}$, то лизинг в данном случае дороже, а значит, предпочтительнее покупка.

**9.** Вторая модель предпочтительнее.

Примечание. Для сопоставимости рассмотрите проекты как повторяющиеся.

**10.** Исходным вариантам отвечают следующие значения приведенных затрат: $W_1 = 3886{,}5$ тыс. руб. и $W_2 = 6524{,}5$ тыс. руб. Коэффициент приведения к более производительному оборудованию $K_{пр} = 22/13$. Тогда для первого варианта приведенные затраты в пересчете на тождественный результат (22 шт./смен) составят величину $W_{1скорр} \approx 6577{,}15$. Так как $W_{1скорр} > W_2$, то более экономичным следует считать второй вариант, у которого приведенные затраты при тождественном результате оказались меньше.

## Тесты

**1.** (3). **2.** (4). **3.** (3). **4.** (4). **5.** (4). **6.** (4). **7.** (1). **8.** (2). **9.** (2). **10.** (3). **11.** (2); (3). **12.** (1). **13.** (2), (5), (7). **14.** (1), (2), (3), (6). **15.** (2). **16.** (4).

# Раздел 5
# ЦЕННЫЕ БУМАГИ

В данной главе содержатся задачи, возникающие при инвестировании средств в ценные бумаги. Задачи сводятся к получению оценок их доходности и курсов. Основное внимание уделяется первичным ценным бумагам – акциям, облигациям и т.п., для которых проблемы анализа решаются на тех же принципах, что и для задач предыдущей главы. Дело в том, что денежные вложения в ценную бумагу аналогичны реальным инвестициям, а генерируемый ценной бумагой денежный поток – дивиденды, прибыль от продажи и т.д. – сродни временной последовательности отдач, полученных в ходе реализации инвестиционного проекта. При этом текущую стоимость этого потока можно трактовать как приемлемую для инвестора стоимость ценной бумаги, а внутреннюю норму доходности, полученную сопоставлением размера уплаченной цены с потоком будущих выигрышей, – как ее доходность.

Для производных ценных бумаг, к которым относятся фьючерсы и опционы, эффективность вложений и стоимость существенно зависят от поведения одноименных характеристик базового финансового актива, что явилось причиной разработки специальных приемов оценивания. Полученные в этом направлении результаты относятся к методам стохастической финансовой математики, и задачи по данному направлению здесь не рассматриваются. Если же в задании идет речь о производной ценной бумаге, то только в связи с ключевыми понятиями и в простейших постановках, не требующих специальных знаний.

Как и в предыдущих главах, все задачи сформулированы для условий определенности, что не умаляет их ценности для обучения финансовым вычислениям и приобретения навыков практических расчетов, как и решения профессиональных задач. Более того, освоение предлагаемого материала необходимо для последующего изучения методов анализа с учетом риска и при неполной информации, которые во многом основаны на рекомендациях, сделанных для условий определенности.

## 5.1. Основные понятия и формулы

### Виды ценных бумаг

Большинство задач данной главы относится к вопросам количественного анализа финансовых операции с ценными бумагами. В этой связи используемый здесь и далее термин «ценная бумага» означает законодательно признанное свидетельство права на получение ожидаемых в будущем доходов при конкретных условиях. Рынок, где товарами являются ценные бумаги, называется *рынком ценных бумаг.* Этот рынок включает в себя *первичный рынок*, где происходит первичное размещение эмитированных ценных бумаг, и *вторичный рынок*, где происходит их обращение.

**Первичные ценные бумаги.** *Облигация* – это ценная бумага, удостоверяющая отношение займа ее владельца (кредитора) по отношению к эмитенту (заемщику) и дающая ему право на получение фиксированных доходов в счет погашения предоставленного эмитенту займа. Облигация имеет номинальную стоимость, или номинал $N$, который присваивают облигации в момент ее эмиссии. Часто облигации имеют купон, который характеризуется купонной ставкой $q$, что дает владельцу купонный доход, равный доле $q$ от номинала.

В зависимости от принятой эмитентом схемы погашения различают следующие основные виды облигаций.

*«Вечная» облигация* – свидетельство бессрочного займа; по ним производится только выплата процентов (купонных доходов), капитал не возвращается, точнее, эмитент указывает на возможность их выкупа, не связывая себя конкретным сроком. К ним условно можно отнести купонные облигации с настолько отдаленным сроком погашения, что можно пренебречь текущей стоимостью их номинала.

*Бескупонная облигация* с погашением по номиналу (приобретается с дисконтом).

*Облигации с периодической выплатой купонных доходов, погашаемые в конце срока.*

*Акция* – это ценная бумага, подтверждающая долевое участие (титул собственности) ее владельца в капитале акционерного общества и дающая ему право на часть прибыли, производимой данным капиталом и периодически выплачиваемой в виде дивидендов. Акции делятся на *обыкновенные* (включают право на участие путем голосования в принятии основных решений) и *привилегированные*. Дивиденд по обыкновенным акциям корректно определять в рублях на одну акцию. В отличие от обыкновенных акций при выпуске привилегированных устанавливается фиксированный уровень дивиденда. Поэтому их, как и облигации, можно относить к ценным бумагам с фиксированным доходом и говорить о ставке дивиденда в процентах к номиналу.

*Депозитные сертификаты*. Эти сертификаты (аналог сберегательных сертификатов для физических лиц) эмитируют и выдают банки в обмен на размещаемые у них средства.

*Вексель* – ценная бумага, представляющая письменное обязательство уплатить определенную денежную сумму и дающая его держателю право требовать от должника его выполнения. Вексель может быть простым или переводным (тратта).

**Производные ценные бумаги.** Из производных ценных бумаг отметим *фьючерсы* и *опционы*. С этими бумагами имеют дело *спекулянты* и *хеджеры*. Спекулянты покупают и продают фьючерсы (опционы) с целью получения выигрыша; напротив, хеджеры покупают и продают эти бумаги, чтобы исключить рискованную позицию на спотовом рынке. Эта позиция может быть обусловлена их бизнесом, в ходе которого они или производят, или используют базисный актив.

Эти инструменты относятся к *срочным контрактам*. В общем случае под срочным контрактом понимается договор на поставку с оговоренной датой определенного актива, в качестве которого могут выступать различные материальные ценности, товары, валюта, ценные бумаги. Финансовые производные ценные бумаги имеют дело с финансовыми активами – облигациями, акциями, валютой.

*Фьючерс*. Идея контракта на будущее (фьючерса) состоит в реализации следующей типовой схемы: продавец контракта берет на себя обязательство продать, а покупатель – купить актив в определенный срок в будущем по цене, фиксируемой в момент сделки.

*Валютный фьючерс* – фьючерсный контракт на валюту с указанием объема поставки, месяца и цены исполнения в соответствии с правилами стандартизации, принятыми биржевой торговлей.

*Опцион*. Эта ценная бумага отличается от фьючерса тем, что один из контрагентов, в соответствии с правилами опциона, имеет оплаченное им другому контрагенту право отказаться от выполнения сделки: продажи или покупки актива. Таким образом, опцион обозначает срочную сделку, по которой одна из сторон приобретает право купить или продать по фиксированной цене предмет контракта, а другая сторона обязуется за денежную премию обеспечить при необходимости реализацию этого права.

Опционы обычно делятся на два класса – европейского и американского типов и бывают двух видов: колл-опционы (право купить) и пут-опционы (право продать).

Американские опционы могут исполняться в любой момент времени до даты истечения срока их действия, а европейские – только на дату окончания контракта.

### Доходность ценных бумаг и операций с ними

Для инвестора доходность вложений в ценную бумагу определяется величиной дохода, полученного на единицу вложенных средств.

**Внутренняя доходность ценной бумаги.** При достаточно длительном сроке ($n$) владения ценной бумагой наиболее адекватным измерителем ее доходности является показатель внутренней нормы прибыли ($IRR$) потока платежей, состоящего из затрат ($I$) на приобретение ценной бумаги и полученных за время владения ею доходов: $\{E_t, t = 1, 2, ..., n\}$. Как и для инвестиционных проектов, этот показатель эффективности определяется следующим уравнением:

$$-I + \sum_{t=1}^{n} E_t (1 + IRR)^{-t} = 0. \qquad (5.1)$$

Вместе с тем в практических расчетах, а тем более для коротких диапазонов дальновидности инвестора используют показатели, основанные на прямом (без дисконтирования) сопоставлении возможной прибыли и затрат.

**Доходность облигации.** Доходность, как правило, сводится к годовому исчислению и показывает эффективность вложений инвестора (отношение прибыли к затратам).

*Текущая доходность.* При определении текущей доходности предполагается, что прибыль инвестора формирует только текущий доход, т.е. тот, который начисляется по отдельным порциям за квартал, полугодие, год. Поэтому в качестве текущего дохода чаще всего рассматривают доход, выплачиваемый по купонам. Допускается также рассмотрение в качестве текущего дохода выплаты в виде дисконта, если бескупонное долговое обязательство эмитировано на срок менее года.

$$\text{Текущая доходность за год} = \frac{\text{Доход (процентные выплаты за год)}}{\text{Рыночная цена (цена приобретения)}} \cdot 100\%;$$

$$\text{Текущая доходность за год} = \frac{\begin{array}{c}\text{Доход (дисконт)}\\ \text{по краткосрочному обязательству}\end{array}}{\text{(Номинал-дисконт)} \cdot \text{Срок до погашения}} \cdot 100\%. \tag{5.2}$$

*Конечная (полная) доходность.* В случае, когда в расчет принимается полный доход за весь срок владения, полученный как в виде дивидендов, так и за счет разницы между покупной ценой и ценой продажи, говорят о конечной (полной) доходности.

$$\begin{array}{c}\text{Конечная}\\ \text{доходность}\\ \text{(годовая)}\end{array} = \frac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{Процентные выплаты за весь срок} +\\ + \text{Прибыль от перепродажи}\end{array}}{\text{Срок владения облигацией(в годах)}}}{\text{Рыночная цена (цена приобретения)}} \cdot 100\%. \tag{5.3}$$

Если срок владения облигацией заканчивается ее погашением, то в качестве составляющей полного дохода в формуле (5.3) место прибыли от перепродажи займет разница между номиналом и покупной ценой (дисконт), и в этом случае

$$\begin{array}{c}\text{Конечная}\\ \text{доходность}\\ \text{(годовая)}\end{array} = \frac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{Процентные выплаты за весь срок} +\\ + \text{Дисконт}\end{array}}{\text{Срок обращения облигации(в годах)}}}{\text{Рыночная цена (номинал-дисконт)}} \cdot 100\%. \tag{5.4}$$

**Доходность акции.** Показатели доходности по акциям устроены по тем же правилам, что и одноименные характеристики (5.2), (5.3) для облигаций.

*Текущая доходность.* При определении текущей доходности предполагается, что прибыль инвестора формирует только текущий доход в виде дивиденда.

$$\begin{gathered}\text{Текущая доходность} \\ \text{акции}\end{gathered} = \frac{\text{Дивиденды за год}}{\text{Рыночная цена (цена приобретения)}} \cdot 100\%. \quad (5.5)$$

*Конечная (полная) доходность.* В случае с акциями инвестор в отличие от держателя облигации может получить дополнительный доход, только продав акцию на вторичном рынке. Вариант погашения здесь отсутствует, и поэтому вместо двух записей (5.3), (5.4) придем к следующей формуле:

$$\begin{gathered}\text{Конечная доходность} \\ \text{акции (годовая)}\end{gathered} = \frac{\dfrac{\text{Дивиденды за весь срок} + \text{Прибыль от перепродажи}}{\text{Срок владения акцией (в годах)}}}{\text{Рыночная цена (цена приобретения)}} \times 100\%. \quad (5.6)$$

**Доходность операций с ценными бумагами.** Возможна ситуация, когда инвестор продает ценную бумагу, не успев получить по ней доход: купонный – для облигации, или дивиденд в сделках с акциями. В этом случае говорят о «доходности операции с ценной бумагой»:

$$\begin{gathered}\text{Доходность операции} \\ \text{с облигацией (с акцией)}\end{gathered} = \frac{\text{Прибыль от перепродажи}}{\text{Цена приобретения}} \cdot 100\%. \quad (5.7)$$

В формуле (5.7) за период начисления принят промежуток времени между датами покупки и продажи (срок владения). Отсюда, опираясь на правило простых процентов, получим годовую доходность:

$$\text{Доходность операции с ценной бумагой (годовая)} = \frac{\dfrac{\text{Прибыль от перепродажи}}{\text{Срок владения (в годах)}}}{\text{Цена приобретения}} \cdot 100\%. \qquad (5.8)$$

В том случае, когда для сравнения финансовых операций применяют сложный процент, следует использовать эффективную ставку (1.4). Тогда показатель годовой доходности примет вид:

$$\text{Эффективная доходность операции с ценной бумагой (годовая)} = \left[\frac{\text{Цена продажи}}{\text{Цена покупки}}\right]^{\frac{1}{\text{срок владения(в годах)}}} - 1. \qquad (5.9)$$

**Доходность, скорректированная с учетом налогов.** Существенное влияние на доходность оказывают налоги, уплачиваемые с доходов по ценным бумагам. При необходимости их учета прибыль, соотнесенную в формулах доходности с затратами инвестора, уменьшают на величину налоговых выплат. Тогда все вышеприведенные формулы в скорректированной таким образом записи будут определять доходность с учетом налогообложения. Например, из формулы (5.6) получим, что для акции

$$\text{Конечная доходность с учетом налогообложения} = \qquad (5.10)$$

$$= \frac{\dfrac{\text{Дивиденды} - \text{налоги с дивидендов} + \text{Прибыль} - \text{Налог с прибыли}}{\text{Срок владения акцией (в годах)}}}{\text{Рыночная цена (цена приобретения)}} \times$$

$$\times 100\%$$

**Доходность вложений в производные ценные бумаги.** Поток платежей по таким бумагам является производным и зависит от потока платежей по базисному активу. Поэтому доходность вложений в эти бумаги зависит от изменения цены базисного актива, впрочем, как и доход от биржевых операций с ними, который в явном виде определяется спекулятивной разностью цен.

Согласно правилам биржевой торговли валютными фьючерсами для открытия одной позиции (приобретения одного фьючерсного контракта) участник должен внести порядка 10% от объема заключенного контракта по текущему курсу. Пусть для определенности эта сумма равна $P$ руб., а $\tau$ – количество календарных дней, в течение которых изменялась котировочная цена по данному контракту. В этих обозначениях доходность вложения по ставке простого процента можно рассчитать по формуле

$$\begin{matrix}\text{Доходность}\\ \text{(годовая)}\end{matrix} = \frac{\text{(Изменение котировочной цены)}}{P} \cdot \frac{360}{\tau} \cdot 100\%. \quad (5.11)$$

В качестве еще одного примера рассмотрим доходность вложения в опцион «колл». Этот опцион дает право приобрести через $T$ лет пакет из $N$ акций по цене $P_0$ долл. за каждую и ставке премиального вознаграждения в размере $\lambda$ долл. за акцию. Допустим, что к назначенному сроку цена акции поднимется до величины $P_T$. Тогда прибыль инвестора за срок владения $T$ составит величину

$$\text{П} = (P_T - P_0)\,N - \lambda \cdot N.$$

Сопоставляя эту прибыль с затратами $З = \lambda \cdot N$, получим следующую формулу:

$$\begin{matrix}\text{Конечная доходность}\\ \text{(годовая)}\end{matrix} = \frac{\dfrac{\text{Прибыль}}{\text{Срок владения (в годах)}}}{\text{Затраты}} \cdot 100\% = \frac{\dfrac{(P_T - P_0)N - \lambda N}{T}}{\lambda N} \cdot 100\%. \quad (5.12)$$

### Курсовые стоимости ценных бумаг

Курс ценной бумаги – это та цена, по которой она продается и покупается на рынке ценных бумаг. Курсовые стоимости выявляются (формируются) на этом рынке в ходе взаимодействия спроса и предложения.

Участники сделок с ценными бумагами, соблюдающие золотое правило: «покупайте дешево, продавайте дорого», принимают решения исходя из прогнозируемых ими значений рыночной цены. Для определения того, во сколько оценит рынок ту или иную ценную бумагу, они анализируют значительное число влияющих факторов как фундаментального, так и текущего характера. В методическом плане для решения этих вопросов широко применяются статистический подход и различные финансово-математические модели.

Основным методом в предлагаемом сборнике задач являются правила обработки потоков платежей. Приложение этих правил для оценки курсов первичных ценных бумаг исходит из рассмотрения только двух факторов: дохода по ценной бумаге и ставки сравнения $i$. При таком подходе за теоретически справедливую оценку курсовой стоимости принимают величину текущей стоимости потока приносимых ею доходов $\{Y_k, k = 1, 2, ..., n\}$ за весь срок ее действия.

$$\text{Курсовая стоимость ценной бумаги} = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}. \quad (5.13)$$

Здесь ставка сравнения $i$ определяется доходностью альтернативного вложения с теми же характеристиками надежности (риска), что и ценная бумага.

При полной определенности эта ставка может приравниваться банковскому проценту по депозитам. Тогда величина (5.12) показывает, сколько надо положить денег на банковский счет, чтобы получать те же доходы, что и по ценной бумаге.

При случайных доходах расчеты проводят на основе средних значений, а ставки дисконтирования получают из безрискового процента $i$ добавлением к нему премии за риск. Размер требуемой премии определяется с помощью показателя «бета вклада» на основании результатов теории равновесия на конкурентном финансовом рынке (Capital Asset Pricing Model – Модель ценообразования капитальных активов). Для задач данной главы упомянутые результаты применяться не будут, и потому более подробные сведения о них здесь не приводятся.

**Оценка облигаций.** Облигации имеют номинальную $N$ и курсовую цену $P$. Согласно положению о фондовых биржах, курс облигации указывается в процентах к ее номинальной стоимости:

$$\text{Курс}(\%) = \frac{\text{Курсовая цена}}{\text{Номинал}} \cdot 100\%.$$

*«Вечная облигация»*. Для такой облигации поток доходов образует бесконечную постоянную ренту с купонным платежом

$$Y = \text{Купонная ставка} \cdot \text{Номинал} = \eta \cdot N,$$

и за оценку ее курсовой стоимости принимается современная величина этого потока

$$\begin{matrix}\text{Курсовая}\\ \text{стоимость}\end{matrix} = \frac{\text{Купонная ставка}}{\text{Ставка сравнения (банковская)}} \cdot \text{Номинал} \qquad (5.14)$$

или в процентах:

$$\text{Курс}(\%) = \frac{\text{Купонная ставка}}{\text{Ставка сравнения}} \cdot 100\% = \frac{\eta}{i} \cdot 100\%. \qquad (5.15)$$

*Бескупонная облигация с погашением по номиналу.* Полагая в (5.12) $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = 0$, $Y_n = N$, получим оценки курсовой стоимости и курса для $n$-периодной облигации с нулевым купоном, выраженные через ее номинальную стоимость $N$:

$$\begin{matrix}\text{Курсовая}\\ \text{стоимость}\end{matrix} = \frac{N}{(1+i)^n}; \ \text{Курс}(\%) = \frac{100\%}{(1+i)^n}. \qquad (5.16)$$

*Облигации с периодической выплатой купонных доходов, погашаемые в конце срока.* Пусть дата покупки совпадает с датой купонного платежа или с датой выпуска. В этом случае придем к следующему потоку доходов:

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = \eta N, \ Y_n = \eta N + N.$$

Подставляя эти значения в (5.12) и преобразовывая, получим следующую оценку:

$$\begin{matrix}\text{Курсовая} \\ \text{стоимость } (P)\end{matrix} = K + \frac{\eta}{i} \cdot (N - K), \tag{5.17}$$

где $K = \dfrac{N}{(1+i)^n}$.

Формула (5.17) связывает текущую цену $P$ с современной величиной финальной выплаты $N$ и четко выделяет роль купонного процента $\eta$. В частном случае купонной ставки, равной ставке сравнения ($\eta = i$ ), курсовая стоимость (5.17) совпадает с номинальной ценой ($P = N$).

Если покупка производится в промежутке между купонными платежами, то при оценке курса следует учесть ту часть дохода, которая причитается продавцу за его долю купонного периода.

*Привилегированная или обыкновенная акция с известным размером дивиденда.* Акции эмитентом не погашаются. Поэтому в данном случае получим ту же оценку, что и для вечной облигации:

$$\begin{matrix}\text{Курсовая} \\ \text{стоимость}\end{matrix} = \frac{\text{Дивиденд } (\%)}{\text{Ставка сравнения (банковский процент)}} \times$$
$$\times \text{Номинал} = \frac{\begin{matrix}\text{Дивиденд на акцию} \\ \text{(руб.)}\end{matrix}}{\text{Банковский процент}}. \tag{5.18}$$

Данное соотношение отражает одну из фундаментальных закономерностей фондового рынка: стоимость акций возрастает с ростом дивиденда и убывает пропорционально размеру банковской ставки.

*Обыкновенные акции с переменным потоком дивидендов.* Помимо рассмотренных, могут быть и иные варианты потока дивидендных выплат. Для регулярных потоков переменных платежей, например, с постоянным абсолютным и с постоянным относительным приростом, оценки курсов сводятся к известным формулам современных величин. Некоторые из них будут даны в ответах к задачам по данной теме.

*Обыкновенные акции со случайным потоком дивидендов.* В этом случае задача о курсовой стоимости существенно усложняется из-за необходимости учета стохастического фактора. Для этого в принятой нами потоковой схеме переходят к детерминированным эквивалентам случайных выплат или случайной доходности: платеж, или ставку дисконтирования, корректируют с учетом риска. Правила подобной корректировки относятся к методам стохастической финансовой математики и для решения задач детерминированного анализа не требуются.

Наряду с курсовой стоимостью для игроков на рынке ценных бумаг значительный интерес имеет вопрос о приемлемой цене, например, покупки; для ее оценивания подходят те же формулы, что и для курса. При этом за ставку дисконтирования можно принять любую устраивающую инвестора доходность, а в качестве будущих выплат – их субъективные и достаточно грубые приближения. Если расчетное значение этой цены окажется выше рыночной, то покупка целесообразна, в противном случае, когда рынок оценивает дороже, покупать не следует.

*Производные ценные бумаги (деривативы).* Что касается производных финансовых инструментов, то для определения их курсов используются иные принципы. Так, для валютных фьючерсов назначение цены (фьючерсного курса) сводится к прогнозу будущего движения котировок и является определяющим фактором при принятии решения об открытии или закрытии позиций. Оценка стоимости опциона, например, на акции основывается на принципе воспроизводимости случайных доходов по нему с помощью динамического портфеля из этих акций и безрискового банковского счета (облигаций). Тогда за стоимость опциона (оценку премии за опцион) принимается начальная цена имитирующего этот опцион портфеля (формула Блэка–Шоулса).

Адекватность оценок, основанных на указанных выше принципах, подтверждается значениями котировок, устанавливаемых на рынке деривативов. Упоминание об этих «недетерминированных» постановках носит информационный характер и не дает основания для их включения в задачи предлагаемого сборника.

## 5.2. Типовые примеры

1. *Полная доходность облигации.*

Облигация номиналом 100000 руб. с купонной ставкой 8% и сроком на 5 лет продавалась с дисконтом 20%. Определить полную доходность этой облигации. Задачу решить двумя способами:

а) опираясь на понятие среднегодового дохода;

б) используя аналогию с инвестиционным проектом.

Решение

а) среднегодовой доход $= \dfrac{5 \cdot 8000 + 20000}{5} = 12000$. По формуле (5.4) найдем, что полная доходность равна:

$$\frac{12000}{80000} \cdot 100\% = 15\%;$$

б) пользуясь аналогией (5.1), определим полную доходность как показатель внутренней нормы прибыли следующего проекта: (–80000; 8000; 8000; 8000; 8000; 108000). С помощью функции в Excel определим полную доходность, вычислив ее значение: $IRR = 13{,}79\%$.

**2.** *Среднегодовая доходность акции.* Инвестор приобрел за 2300 руб. привилегированную акцию номинальной стоимостью 2000 руб. с фиксированным размером дивиденда 15% годовых. Через 5 лет (в течение которых дивиденды регулярно выплачивались) акция была им продана за 2100 руб. Определить конечную (среднегодовую) доходность по данной акции.

Решение

Конечная доходность (формула (5.6)):

$$\frac{2000 \cdot 0{,}15 - (2300 - 2100)/5}{2300} \cdot 100\% \approx 11{,}3\%.$$

**3.** *Текущая доходность акции.*

АО в 2001 г. выпустило обыкновенные акции в количестве 100 тыс. штук номинальной стоимостью 100 руб. каждая. Инвестор «Х» приобрел в 2002 г. пакет акций, состоящий из 100 штук, по цене 150 руб. за акцию. Рыночная стоимость одной акции в настоящее время – 300 руб. Определить:

а) текущую доходность пакета акций инвестора Х (без учета налогов), если ежегодный дивиденд по акциям выплачивается в размере 60 руб. на одну акцию;

б) какова текущая доходность точно такого же пакета акций для его потенциального покупателя *Y*?

Решение

а) очевидно, что текущие доходности пакета акций и одной акции совпадают. Подставляя данные задачи в соотношение (5.5), получим, что текущая доходность вложения инвестора *X* равна:

$$\frac{60 \cdot 100}{150 \cdot 100} \cdot 100\% = 40\%.$$

Исходя из равенства искомого показателя для пакета акций и для одной акции, можно не учитывать число акций. В этом случае текущая доходность вложения составит:

$$\frac{60}{150}\cdot 100\% = 40\%;$$

б) текущая доходность для инвестора $Y$ (текущая доходность пакета) равна:

$$\frac{60}{300}\cdot 100\% = 20\%.$$

**4.** *Текущая доходность облигации.*

Облигации с купоном 9,5% продается по курсу 98%.Чему равна ее текущая доходность?

Решение

Согласно определению (5.2) текущая доходность составит:

$$\frac{9{,}5}{98}\cdot 100\% \approx 9{,}7\%.$$

**5.** *Сравнение ценных бумаг по доходности вложения.*

Одновременно эмитированы облигации государственного займа для юридических лиц и депозитные сертификаты крупного, устойчиво работающего коммерческого банка. Условия выпуска облигаций следующие: период – 3 года, номинал – 1000 руб., дисконт при эмиссии – 15%, годовой доход – 10%. Условия выпуска депозитных сертификатов: период обращения – 3 года, номинал – 1000 руб., начисления производятся по простой ставке с годовым доходом 22%.

По государственным облигациям доход налогом не облагается, по депозитным сертификатам доход облагается налогом по ставке 15%.

Что выгоднее для инвестора: облигация или депозитный сертификат?

Решение

По государственным облигациям доход (налогом не облагается) составит:

$$100 \cdot 3 + 150 = 450,$$

а по депозитным сертификатам с учетом налогообложения (15%):

$$(220 \cdot 3) \cdot 0{,}85 = 561.$$

Доходность государственных облигаций равна:

$$\frac{\frac{450}{3}}{850} \approx 0{,}176 = 17{,}6\%.$$

Доходность депозитных сертификатов составит:

$$\frac{\frac{561}{3}}{1000} = 0{,}187 = 18{,}7\%.$$

Отсюда понятно, что для инвестора выгоднее приобрести сертификат.

Примечание. Владельцу ценных бумаг, который реинвестирует получаемые по ним доходы, имеет смысл для оценки доходности исходить из сложного процента и использовать метод дисконтирования денежных потоков. Для этого следует рассмотреть следующие потоки платежей:

– (–850; 100; 100; 1100) – для облигации, $IRR \approx 0{,}17 = 17\%$;
– (–1000; 187; 187; 1187) – для сертификата, $IRR \approx 0{,}19 = 19\%$.

Внутренняя ставка доходности вложения в сертификат больше (19% > > 17%), поэтому он выгоднее.

**6.** *Оценка курса облигации.*

Определить ориентировочную рыночную стоимость и оценку курса для корпоративной облигации номиналом 1000 руб. при условии, что срок погашения через 3 года, купонная ставка и ставка банковского процента – 10 и 4% годовых.

Решение

Для расчета следует использовать формулу (5.13):

$$P = \frac{100}{1{,}04} + \frac{100}{1{,}04^2} + \frac{100}{1{,}04^3} + \frac{1000}{1{,}04^3} \approx 1166{,}5 \text{ руб.}$$

Тот же результат можно найти, исходя из соотношения (5.17), в котором:

$$K = 1000/1{,}04^3 = 888{,}996;\ \eta/i = 0{,}1/0{,}04 = 2{,}5;\ N = 1000;$$

$$P = 888{,}996 + 2{,}5 \cdot (1000 - 888{,}996) \approx 1166{,}5 \text{руб.}$$

Переходя к процентам от номинала, получим оценку курса:

P(%) = 116,65%.

7. *Оценка курса акции.*

Балансовая прибыль акционерного общества с уставным фондом 2 млн руб., полученная исключительно от производственной деятельности, составила 10 млн руб. Общее собрание акционеров решило, что оставшаяся после уплаты налогов прибыль распределится следующим образом: 20% – на развитие производства; 80% – на выплату дивидендов. Каков должен быть (ориентировочно) курс акций данного АО, если банковский процент составляет 16%, номинал акций – 100 руб., а ставка налога на прибыль – 24%?

Решение

Количество акций $n = 2000000/100 = 20000$ шт. Прибыль после уплаты налогов составит:

$$П = 0,76 \cdot 10^7 = 7,6 \text{ млн руб.}$$

На выплату акционерам пойдет сумма:

$$D = 0,8 \cdot 7600000 = 6080000 \text{ руб.}$$

Выплата дивидендов на одну акцию:

$$d = \frac{6080000}{20000} = 304 \text{ руб.}$$

Согласно (5.18) ориентировочный курс акции составит:

$$P = \frac{304}{0,16} = 1900 \text{ руб.}$$

8. *Оценка курсовой стоимости депозитного сертификата.*

Депозитный сертификат был выпущен на сумму 1000 руб. под 12% годовых. Через полгода текущая ставка уменьшилась до 6%. Какой должна стать теоретически справедливая цена сертификата на этот момент?

Решение

Курсовая стоимость сертификата $P$ за полгода до погашения определяется величиной, финансово эквивалентной сумме погашения. При погашении сертификата его владелец получит 1120 руб.(1000 · 1,12). Отсюда получим:

$$P = 1120/(1 + 0,06)^{1/2} \approx 1087,8 \text{ руб.}$$

9. *«Справедливая» цена продажи акции.*

Инвестор приобрел акцию в начале текущего финансового года за 1000 руб. и продает ее по прошествии 4 мес. Определите примерную стоимость, по которой совершается продажа, если ожидаемая прибыль в расчете на акцию по итогам года составляет 120 руб. Ситуация на финансовом рынке и положение компании с начала года существенно не изменились.

Решение

Продавец акции заинтересован в том, чтобы оправдать вложенный капитал и получить полагающийся ему за 4 месяца дивиденд. Следовательно, примерная стоимость акции:

$$P = 1000 + (120/12) \cdot 4 = 1040 \text{ руб.}$$

**10.** *Внутренняя доходность «вечной» облигации.*

«Вечная» облигация, приносящая 4,5% фиксированного годового дохода, куплена по курсу 90%. Какова эффективность вложения (сложная ставка годового процента), если купонные выплаты по облигации производятся поквартально?

Решение

Определим поквартальную внутреннюю доходность $j$ бесконечного потока периодических купонных выплат по ставке $\frac{4{,}5\%}{4}$ с первоначальной разовой инвестицией 90% от номинала. Приравнивая текущую стоимость потока доходов величине вклада, получим следующее уравнение: $\dfrac{\frac{4{,}5\%}{4}}{j} = 90\%$. Откуда $j = 0{,}0125$. Переходя от квартального к сложному годовому проценту, найдем эффективную доходность вложения:

$$r_{ef} = (1 + 0{,}0125)^4 - 1 = 0{,}0509 = 5{,}09\%.$$

## 5.3. Задачи для самостоятельного решения

### Расчетные задачи

**1.** Оценить текущую стоимость облигации с нулевым купоном номинальной стоимостью 1 млн руб. и сроком погашения через 3 года. Ставка дисконта $r = 12\%$.

**2.** Оценить текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1 млн руб., с купонной ставкой 16% годовых и сроком погашения 5 лет. Ставка дисконта $r = 10\%$.

**3.** Оценить текущую стоимость бессрочной облигации, если по ней ежегодно выплачивается доход в размере 100 000 руб. Ставку дисконта принять равной $r = 10\%$.

**4.** Определить ориентировочную рыночную стоимость облигации номиналом 100 000 руб. при условии, что срок погашения облигации через 3 года, купонная ставка 10% годовых, ставка банковского процента $i = 4\%$.

**5.** Определить цену акции нулевого роста при условии, что дивиденды в размере 500 руб. из года в год будут оставаться неизменными, а требуемый уровень доходности – 10%.

**6.** Правительство решает выпустить краткосрочные долговые обязательства сроком на три месяца, доход выплачивается в виде дисконта, банковская ставка по депозитам – 60%, обязательства размещаются среди производственных предприятий. Предполагается, что доход по долговым обязательствам государства налогом не облагается, а доходы (проценты) по депозиту облагаются налогом на прибыль по ставке 32%. Определить минимально допустимый размер дисконта, обеспечивающий размещение облигаций (при расчете учесть налогообложение).

**7.** При выполнении операции учета векселя с владельца удерживаются комиссионные в размере 0,5% от достоинства векселя. Вычислить доходность этой финансовой операции, если учет векселя производится по простой ставке $d = 30\%$ за 3 месяца до погашения.

**8.** Инвестор $X$ приобрел за 800 руб. привилегированную акцию номинальной стоимостью 1000 руб. с фиксированным размером дивиденда 30% годовых. В настоящее время курсовая стоимость акции – 1200 руб. Определить:

а) текущую доходность по данной акции (без учета налогов);

б) текущую доходность вложения инвестора «$X$».

**9.** Ожидается, что выплачиваемый по акции дивиденд составит в первом году сумму $D = 5$ долл. и в будущем неограниченно долго будет возрастать на $g = 10\%$ в год. Оценить текущую стоимость этой акции, если ставка дисконта $r = 15\%$.

**10.** Что выгоднее производственному предприятию (с учетом налогообложения прибыли в 32% годовых): инвестировать 1 млн руб. на депозит в банке сроком на 1 год с выплатой 21% годовых или купить депозитный сертификат того же банка со сроком погашения через год и выплатой 17% годовых ( доход от покупки депозитного сертификата облагается налогом по ставке 15%)?

**11.** Трехгодичная купонная облигация номиналом 100 долл. и с купонной ставкой 6% имеет текущую стоимость 92,6 долл. Ставки налогов на прирост капитала и процентный доход одинаковы и равны 30%. Требуется:

а) определить полную годовую доходность этой облигации;

б) найти реальное значение этой доходности, если ожидается инфляция с годовым темпом 4%;

в) рассчитать внутреннюю доходность;

г) определить ее реальное значение при инфляции с тем же темпом 4%.

**12.** Текущий курс акций составляет 30 долл. Инвестор соглашается купить опцион за 200 долл. на покупку 100 акций по 35 долл. через два месяца. Допустим, что к назначенному сроку курс акций поднимется до 50 долл. Какова годовая ставка процента на вложенные в покупку опциона 200 долл.?

**13.** Для заключения одного 1000-долларового контракта на счет биржи требуется внести 10% от объема контракта по текущему курсу. Допустим, что в условиях рассматриваемой задачи этот курс составляет 28 руб. Известно, что к дате закрытия (13 апреля) котировочная цена снизилась по сравнению с ценой открытия (4 апреля) на 0,5 руб. Определить годовую доходность от игры на понижение и на этой основе пояснить действие финансового рычага.

**14.** Казначейские векселя достоинством в 100 долл. имеют периоды погашения 90 и 180 дней. Эти векселя продаются по цене 98,25 долл. и 96 долл. Оценить с точки зрения доходности сравнительную выгодность двух вариантов: покупка и погашение 90-дневных векселей или покупка 180-дневных бумаг и их продажа через те же 90 дней (предполагается, что кривая доходности сохраняется неизменной).

**15.** Начальный капитал инвестора равен 200 долл. Предположим, что он может купить на эти деньги одну акцию компании А по курсу в 200 долл. или приобрести, исходя из премии в два доллара за акцию, месячный опцион на покупку 100 акций этой компании по цене 210 долл. Сравнить по доходности вложение в акцию с покупкой опциона для двух исходов:

а) за месяц курс акций повысится до 220 долл.;

б) за месяц курс акций снизится до 180 долл.

**16.** Корпоративные облигации выпущены 1 января 2001 г. Срок обращения облигаций – 2 года, годовой купон – 8,5%, номинальная стоимость – 1000 руб. При первичном размещении стоимость облигации составила 974 руб. Какова должна быть минимальная величина банковской ставки простого процента, предполагающая более выгодный вариант вложения денег на 2 года для инвестора, купившего облигацию в ходе первичного размещения (налогообложение не учитывается)?

**17.** Инвестор купил в начале года 100 акций компании А по цене 100 руб. каждая. В течение года он получил 30 руб. дивидендов на каждую акцию. Найти текущий, капитальный и полный доходы и соответствующие годовые доходности, если к концу года цена за акцию выросла до 150 руб.

**18.** В начале года господин *N* обладал четырьмя видами ценных бумаг в следующих количествах и со следующими текущими и ожидаемыми к концу года ценами (табл. 5.1).

Таблица 5.1

| Ценные бумаги | Количество акций | Текущая цена, долл. | Ожидаемая цена к концу года, долл. |
|---|---|---|---|
| A | 100 | 50 | 50 |
| B | 200 | 35 | 40 |
| C | 50 | 25 | 50 |
| D | 100 | 100 | 110 |

Какова ожидаемая доходность этого портфеля за год?

**19.** Пять лет назад компания «Система» разместила облигации со сроком погашения 20 лет, купонной ставкой 17% и премией за досрочное погашение в размере 10%. Сегодня объявлено о досрочном погашении облигаций. Размещение облигаций осуществлено по номиналу 1000 долл. Рассчитать реализованную доходность облигаций для инвестора, купившего ее в ходе первичной эмиссии и вынужденного досрочно погасить ее.

**20.** Текущая ставка составляет 12%. Владелец бессрочной облигации полагает, что в недалеком будущем ставка процента вырастет и стабилизируется на уровне 13%. Что для него выгоднее: продать эту облигацию или сохранить ее?

**21.** Облигация выкупается через 10 лет по номиналу 1000 руб., доходность – 12%, ставка процента, принятая при оценке, равна 10%. Найти размер премии.

**22.** Облигация с полугодовыми купонными выплатами приобретается за три месяца до погашения по курсу 105,23%. Купонная ставка составляет 20% годовых. Определить доходность облигации в виде годовой ставки:

а) простых процентов;

б) сложных процентов.

**23.** Приобретен портфель облигаций трех видов: А, Б и В. Определить «внутреннюю» ставку доходности инвестиции в этот портфель для его владельца. В табл. 5.2 приведены данные об облигациях, входящих в портфель, и условия приобретения этих облигаций владельцем портфеля.

Таблица 5.2

| Вид облигации, $j$ = = А, Б, В | Количество, $n_j$ | Номинальная стоимость, $N_j$ | Срок погашения, $T_j$, лет | Купонный доход, $\eta_j$, % | Число выплат в год | Цена приобретения, $Q_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| А | 20 | 200 | 5 | 10 | 2 | 180 |
| Б | 30 | 100 | 6 | 6 | 1 | 90 |
| В | 10 | 100 | 3 | 8 | 1 | 100 |

**24.** Компания ABC обещает выплачивать дивиденды в размере 180 руб. на акцию в течение всего времени в будущем. Текущий курс акции составляет 1440 руб. Определить:

а) внутреннюю ставку доходности вложения в эти акции;

б) следует ли их покупать, если требуемая ставка доходности равна 11%?

**25.** Эмитент выпускает облигации двух типов со сроком обращения 1 год и одинаковым номиналом. Облигации первого типа предусматривают ежеквартальную выплату купонов; по второму типу – два раза в год. Облигации приобретаются по номиналу (с учетом возможности реинвестирования купонных выплат при ставке квартальной доходности 10%). Определить:

а) отношение (в процентах) купона облигации первого типа к купону облигации второго типа (налогообложение не учитывать);

б) чему равна годовая доходность по обеим облигациям.

## Аналитические задачи

**1.** Предполагается, что ежегодные дивиденды на одну акцию будут неограниченно долго возрастать с одинаковым темпом относительного прироста $g$. Величина выплаченного за предыдущий год дивиденда равна $D$. Получить формулу для оценки стоимости $P$ данной акции, если приемлемая (ожидаемая или требуемая) доходность равна $r$.

**2.** Допустим, что доход от акции получают только в виде дивидендов, т.е. ее продажа не предусмотрена. Если предположить, что дивиденды постоянны, равны $d$ и выплачиваются $p$ раз в году, то какова будет расчетная цена акции $P$?

**3.** При продаже купонной облигации ее рыночная цена может быть выше – облигация продается с премией, ниже – облигация продается с дисконтом, или равна номиналу $N$. Премия есть «переплата» за будущие высокие доходы, а дисконт – «недоплата», вызванная низкими купонными поступлениями от облигации. Получить формулу размера премии (дисконта) в зависимости от срока до погашения $n$ и соотношения купонной ставки $\eta$ и принятой для оценки стоимости ставки процента $i$.

**4.** В начале года инвестор приобрел $n$ видов акций в количествах $m_1, m_2, ..., m_n$ штук по ценам $P_1, P_2, ..., P_n$. В конце года он собирается их распродать и получить причитающийся ему доход. Ожидается, что к этому времени цены продаваемых акций установятся на уровнях $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, а дивиденды по ним в течение года выплачиваться не будут. Какова ожидаемая доходность $R_p$ этого портфеля за рассматриваемый год?

**5.** Европейский опцион на покупку акции имеет контрактную цену $K$. Чему равен доход, который получит владелец этого опциона при его исполнении, если рыночная цена акции на дату истечения равна $S$?

**6.** Рассмотрим следующую финансовую операцию, основанную на комбинировании двух активов: валютного фьючерса и депозита. В начале операции берется валютный кредит по ставке $d$, который конвертируется в рубли по текущему курсу $\rho_0$. Полученная сумма (в рублях) делится на две части: первая часть расходуется для закупки наличной валюты на дату погашения кредита на фьючерсном рынке по фьючерсному курсу $F$ (стоимость контракта в момент открытия позиции); вторая часть помещается на тот же срок на депозит с рублевой доходностью $j$.

В конце операции происходит конвертация рублей в валюту по фьючерсному курсу и возврат кредита. При каком соотношении между ставками $d, j$ и курсами $\rho_0$, $F$ данная операция целесообразна? Чтобы упростить рассмотрение, относительно малыми затратами, необходимыми для участия во фьючерсных торгах, предлагается пренебречь.

**7.** Портфель составлен из $n$ видов бескупонных облигаций, различающихся номиналом и сроком до погашения. Облигация вида $j$ имеет номинал $N_j$, ее срок до погашения (в составе портфеля) равен $j$ лет, она куплена по цене $Q_j$ в количестве $m_j$ штук. Как определить доходность этого портфеля для его владельца в виде годовой ставки сложных процентов?

**8.** Выпущена облигация номинальной стоимостью $N$ руб. и купонной ставкой $\eta\%$. Купон выплачивается ежегодно. Определить рыночную стоимость облигации за 3 года до погашения, если предполагаемая динамика изменения ставки альтернативной доходности такова: в течение 1-го года – $i_1\%$, во 2-м году – $i_2\%$, в 3-м – $i_3\%$.

**9.** Предполагается, что дивиденды на одну акцию будут каждый год возрастать в одной пропорции, т. е. с одинаковым темпом прироста $g$. В следующем году ожидаются выплаты дивидендов в размере $D$. В настоящий момент затраты на приобретение акции составляют $P$. Чему равна внутренняя ставка доходности $k^*$ по инвестициям в эти акции?

**10.** Допустим, что единственным источником роста доходов компании является инвестируемая в производство прибыль, которая остается после выплаты дивидендов. Кроме того, предполагается, что число акций в обращении, доля дивидендных выплат $\rho$ и доходность капитала по инвестициям $\alpha$ во времени не меняются. Требуется:

а) определить, чему равен в обозримом будущем ежегодный относительный прирост доходов, приходящихся на одну акцию;

б) получить формулу оценки курсовой стоимости $P$ этой акции, если цена аналогичных акций обеспечивает доходность $r$, а выплаченный на нее дивиденд составил в предыдущем году сумму $D_0$.

**11.** Облигации с периодической выплатой процентов и погашением по номиналу $N$ имеют следующие характеристики: длительность обращения – $T$, купонная ставка – $g$, цена первичного размещения – $N$. Пусть $r_1, r_2, ..., r_T$ – значения переменного темпа инфляции на единичных промежутках периода $T$. Как следует изменять номинальные значения купонной ставки по периодам выплаты процентов, чтобы реальная доходность облигации осталась на уровне, определяемом первичной продажей при отсутствии инфляции?

## Ситуационные задачи

**1.** За некоторый период времени количество акций у гражданина Петрова увеличилось на 17%. На сколько процентов увеличилась цена каждой акции гражданина Петрова, если общая стоимость его акций увеличилась на 134%?

**2.** Господин *Y* решил расширить производство. Поскольку собственных средств у него на эти цели нет, выход из положения остается один: выпуск ценных бумаг, а конкретно, купонных облигаций! Согласно замыслам господина *Y*, планируется введение одной дополнительной линии основного производства, которая стоит 6400 тыс. руб., а также установка упаковочного оборудования и фильтра для воды – 1300 и 1000 тыс. руб. соответственно. Сумма, необходимая для начала выпуска облигаций (стартовый оборотный капитал), – 2100 тыс. руб. Требуется:

а) рассчитать необходимую величину займа (номинал выпуска) с учетом того, что в нее, помимо перечисленных выше сумм, входят также затраты на организацию займа в размере 1,2025% от номинала выпуска;

б) определить количество облигаций, которые должны быть размещены при условии, что они размещаются по номиналу, а номинал одной облигации равен 1000 руб.

**3.** Проект, который собирается реализовать господин *Y* из предыдущей задачи, рассчитан на 5 лет и требует 10931,45 тыс. руб. начальных инвестиций. В результате реализации проекта ежегодные объемы продаж составят 39100 тыс. руб., а требуемые для этого полные затраты будут равны 31700 тыс. руб. Для финансирования проекта решено выпустить купонные облигации с размещением по номиналу и купонной ставкой 16%. В качестве источника их погашения господин *Y* рассматривает свободные денежные средства, которые он получит в ходе реализации проекта. Чтобы накопить нужную сумму, он собирается создать погасительный фонд. У него есть возможность сформировать этот фонд на специальном счете, на который начисляется 14% в год.

Определить минимально допустимый срок погашения, если ставка налога на прибыль – 24%, а купонные выплаты вычитаются из прибыли до ее налогообложения.

**4.** У двух студентов, Петрова и Сидорова, было по 1 тыс. руб. Петров в течение года хранил деньги в стеклянной банке, а Сидоров купил на вторичном рынке привилегированную акцию номинальной стоимостью 1000 руб. с 10%-ным дивидендом. Покупка этой акции обошлась ему в 900 руб., а через год он ее продал за 1100 руб. Во сколько раз у Сидорова стало больше денег, чем у Петрова? В расчетах учесть выплаченные Сидоровым налоги: подоходный — по ставке 13%, и на операции с негосударственными ценными бумагами — по ставке 0,3% от объема сделки с каждой стороны.

**5.** Компания «Оденем всех» — малоизвестный производитель широкого ассортимента рабочей и форменной одежды и всевозможной экипировки. Аналитики обсуждают перспективы роста ее дивидендов и доходов. Федор Скворцов прогнозирует 5%-ный рост в течение всего времени. Однако его брат Михаил предсказывает 20%-ный рост дивидендов, но лишь в течение 3 последующих лет, после чего ожидает снижения прироста до 4%. Сейчас компания платит дивиденды в сумме 30 руб. на акцию. Цена акций с аналогичной степенью риска в настоящий момент такова, что обеспечивает 14%-ную ожидаемую доходность. Определить:

а) стоимость акций компании с точки зрения Федора;

б) стоимость акций компании с точки зрения Михаила.

**6.** Анна Васильева прицениваетcя к акциям корпорации «Белый ветер» с текущим курсом 477 руб. и ежегодными выплатами дивидендов в сумме 12 руб. на акцию. Ожидается, что в следующем году и в течение всего будущего времени эта корпорация начнет выплачивать в виде дивидендов 40% доходов, а их оставшуюся часть будет реинвестировать с доходностью 15% в год. Цена акций с аналогичной степенью риска такова, что обеспечивает 12%-ную ожидаемую доходность. Опасаясь ошибиться, Анна обратилась за советом к своему другу Юрию Семенову, который сразу уловил связь между ее вопросом и содержанием аналитической задачи 10. Применив содержащуюся в ответе этой задачи формулу, он вычислил чистый приведенный доход (*NPV*) одной акции и развеял все сомнения Анны по поводу покупки. Чему равен найденный Семеновым показатель *NPV* и какова будет рекомендация аналитика?

**7.** По итогам года господин Иванов получил премию в размере 34200 руб. Намереваясь увеличить эту сумму к планируемому им в июле отпуску, он собирается вложить имеющиеся средства в 180-дневные государственные облигации. При первичном размещении 15 января 2005 г. они продаются по 950 руб. при номинале 1000 руб. В данный момент существует и другая возможность — купить по цене 900 руб. на первичном рынке годовые облигации с таким же номиналом и продать их за 180 дней как раз к отпуску, до срока погашения. Определить:

а) что выгоднее для Иванова: разовое погашение или игра на кривой доходности;

б) эффективность вложения в каждый вид облигаций и игры по кривой доходности.

**8.** Петров прогнозирует рост курсовой стоимости интересующих его акций компании АБВ 43% за квартал. Следуя принципу: «Покупайте дешево и продавайте, когда дорого», он решает приобрести пакет этих акций и в конце квартала их продать. Его финансовые возможности позволяют оплатить за свой счет 60% от фактической стоимости намеченного им количества этих акций. Определить:

а) под какой максимальный квартальный процент может взять инвестор ссуду в банке, с тем чтобы обеспечить доходность на вложенные собственные средства на уровне не менее 30% за квартал (без учета налогов);

б) величину эффекта финансового рычага, вызванного привлечением заемных средств.

## Тесты

**1.** Ставка процента выросла с 8 до 10%. Держатель ценной бессрочной бумаги, которая приносит ему годовой доход в 100 ден. ед. постоянно, будет иметь:

1) потери капитала в 40 ден. ед.;
2) потери капитала в 50 ден. ед.;
3) доход от прироста капитала в 50 ден. ед.;
4) потери капитала в 250 ден. ед.;
5) доход от прироста капитала в 250 ден. ед.

**2.** Ставка процента по облигациям будет тем ниже, чем:

1) короче срок, на который они выпущены;
2) больше возможный риск;
3) ниже ликвидность;
4) больше ожидаемая инфляция;
5) больше номинальная цена по отношению к рыночной.

**3.** Субъект направляет свои деньги на приобретение государственных ценных бумаг лишь в случае, если:

1) процентные ставки скоро вырастут;
2) процентные ставки значительно сократятся;

3) процентные ставки сначала вырастут, а затем снизятся;

4) будет наблюдаться инфляционный рост цен;

5) ни один из ответов не верен.

**4.** Цена на колл-опцион становится тем меньше, чем при прочих равных:

1) выше цена базисной акции;

2) выше цена исполнения;

3) выше безрисковая ставка процента;

4) больше времени до даты истечения;

5) ниже риск базисной акции.

**5.** Какому направлению вложений присуще свойство финансового рычага:

1) вложениям в акции;

2) вложениям в валютные фьючерсы;

3) капиталовложениям с частичным заимствованием;

4) вложениям в облигации;

5) вложениям в опционы?

**6.** Ожидается, что компания *A* выплатит своим акционерам дивидендный доход в размере 10 долл. на акцию, после чего ее акции будут продаваться по курсу 120 долл. Каков ориентировочный текущий курс акций компании, если ставка рыночной капитализации равна 10%?

1) 118,18;

2) 100;

3) 109,09;

4) все ответы неверны.

**7.** АО выпустило 900 простых акций и 100 привилегированных, а также 150 облигаций. Номинал у каждой бумаги один и тот же – 1 тыс. руб. Процент по облигациям составляет 12%, а ставка дивиденда по привилегированным акциям – 15%. Требуется разместить держателей различных ценных бумаг в порядке уменьшения их дохода, если прибыль к распределению между акционерами составила 159 тыс. руб.:

1) владелец привилегированной акции; владелец облигации, владелец обыкновенной акции;

2) владелец обыкновенной акции, владелец привилегированной акции, владелец облигации;

3) владелец привилегированной акции, владелец обыкновенной акции, владелец облигации.

**8.** За прошедший год фирма выплатила дивиденды в размере 12 руб. на акцию. Прогнозируется, что в обозримом будущем дивиденды по акциям этой фирмы будут ежегодно увеличиваться на 4%. В настоящее время требуемая ставка доходности для подобных инвестиций равна 11%. При текущем курсе акции 240 руб.:

1) внутренняя ставка доходности акций составляет 9,2%;

2) внутренняя ставка доходности акций составляет 5%;

3) внутренняя ставка доходности акций составляет 9%;

4) акции переоценены;

5) акции следует покупать.

**9.** АО выпускает облигации с купонной ставкой $g$, сроком погашения $T$ лет и продает их на первичном рынке по номиналу $N$. Если годовой темп инфляции $r$, то как надо скорректировать купонные ставки $g$, чтобы реальная доходность первичного вложения осталась прежней, т.е. равной $g$?

1) $g_t = g(1 + r)^t$, $t = 1, 2, ..., T$;

2) $g_t = g + r$;

3) корректировать следует не купонные ставки, а объем погашения: $N_{\text{скор.}} = N(1 + r)^t$;

4) $g_t = g + r + gr$.

**10.** Господин Петров всем видам вложений предпочитает краткосрочные облигации: покупает, хранит их до срока погашения, а затем реинвестирует поступившие средства. В официальных источниках годовая доходность подобных облигаций рассчитывается по правилу простой ставки. На данный момент у Петрова имеются две возможности: трехмесячные облигации с доходностью 24% или шестимесячные, у которых доходность равна 24,5%. Какие облигации выгоднее:

1) трехмесячные;

2) шестимесячные;

3) никакой разницы, доход за год будет одинаков;

4) исходной информации недостаточно.

**11.** Инвестор может воспользоваться двумя различными выпусками бескупонных облигаций $A$ и $B$ с периодами созревания 1 год и 3 года. Действующие рыночные цены этих облигаций таковы, что их эффективные доходности одинаковы. Предположим, что инвестор желает вложить деньги сроком на 2 года. Эксперты прогнозируют устойчивое снижение процентной ставки, которое сохранится, по крайней мере, до конца трехлетнего срока. При такой тенденции инвестору следует:

1) диверсифицировать вклад по вложениям в бумаги А и В;

2) двукратно последовательно вложить деньги в облигации А: купить, погасить и снова купить и держать до погашения;

3) купить облигации В, продать их через год и реинвестировать вырученные деньги в облигации А;

4) инвестировать в облигации В с последующей продажей через 2 года.

**12.** Продажа опциона означает, что обязательства по его исполнению несет:

1) продавец опциона;

2) покупатель опциона;

3) иное лицо.

**13.** Опцион, право по которому может быть реализовано в любое время от момента его выпуска до даты исполнения, называется:

1) европейским;

2) американским;

3) имеет другое название.

**14.** Доходы предприятия, полученные в виде дивидендов по акции, облагаются налогом по ставке 15%, а доходы граждан, полученные по государственным ценным бумагам, налогом не облагаются. Предприятие *А* приобретает 10 привилегированных акций номиналом 10 тыс. руб., которые приносят 25% годовых. Физическое лицо *В* приобретает 100 государственных облигаций номиналом 1 тыс. руб., приносящих 20% годовых. Кто из инвесторов получит больший годовой доход с учетом налогообложения доходов, если ставка подоходного налога для физического лица *В* равна 13%?

1) доходы инвесторов равны;

2) инвестор *А*;

3) инвестор *В*.

**15.** Оцените справедливость утверждения: «Доходность вложений в ценные бумаги тем выше, чем выше надежность этих ценных бумаг»:

1) справедливо;

2) несправедливо;

3) справедливо только для акций;

4) справедливо только для долговых обязательств;

5) справедливо только при определенных условиях.

**16.** По облигации сроком обращения 1 год выплачивается купонный доход в размере 4%. Рыночная стоимость облигации –

92% от номинала. При какой процентной ставке текущая стоимость облигации будет равна ее рыночной стоимости?

1) 12%;

2) 13%;

3) 14%;

4) задание сформулировано некорректно;

5) нет правильного ответа.

**17.** Проценты по долгосрочным облигациям компании АБВ выплачиваются один раз в год – в январе. Если предположить, что ситуация на фондовом рынке остается стабильной, как будут соотноситься курсовые цены на эти облигации в марте и ноябре?

1) цены будут равны;

2) мартовская цена выше ноябрьской;

3) ноябрьская цена выше мартовской.

**18.** АО выпускает облигации с купонной ставкой 8,5% и продает их на первичном рынке по номиналу. Двумя годами ранее то же АО выпустило долговые обязательства с купонной ставкой 8%. Определить, какое из следующих утверждений справедливо в отношении 8%-х бумаг:

1) их текущая рыночная цена выше номинала;

2) их текущая рыночная цена ниже номинала;

3) их рыночная цена равна номиналу;

4) задание сформулировано некорректно.

**19.** Допустим, торговля ценными бумагами на фондовой бирже ведется по принципу организации «залпового рынка», т.е. путем единовременного сопоставления всех приказов на покупку и на продажу. Что, применительно к этой схеме организации торговли, представляет собой курс ценной бумаги, фиксируемый биржей?

1) цену, позволяющую реализовать наибольшее число приказов относительно купли ценных бумаг по минимальной цене;

2) цену, позволяющую реализовать наибольшее число приказов относительно продажи ценных бумаг по максимальной цене;

3) цену, позволяющую максимизировать количество проданных и купленных ценных бумаг;

4) цену, позволяющую максимизировать число совершенных сделок.

**20.** Облигация со сроком погашения через 2 года погашается по номиналу. По облигации выплачивается ежегодный купонный доход в размере 10% от номинала. Рыночная цена облигации составляет 91,87% от номинальной стоимости. Найти внутреннюю ставку доходности:

1) 10%;

2) 15%;

3) 15,31%;

4) задание сформулировано некорректно.

**21.** Облигация со сроком погашения через год и годовой купонной ставкой 10% продается по курсу 75%. Какова ее доходность к погашению?

1) 33,33%;

2) 10%;

3) 46,67%;

4) нет правильного ответа.

## Ответы и решения

### Расчетные задачи

**1.** 711780 руб.

**2.** 1227447 руб.

**3.** 1 млн. руб.

**4.** 116650 руб.

**5.** 5000 руб.

**6.** 9,25%.

**7.** С учетом комиссионных дисконт составит:

$\pi = 0{,}005 + 0{,}3 \cdot 3/12 = 0{,}08$,

а затраты (цена приобретения векселя):

$P = 1 - (0{,}005 + 0{,}3 \cdot 3/12) = 0{,}92$.

Подставим эти значения в (5.8) и вычислим доходность:

$$j = \frac{0{,}08 \cdot 12}{0{,}92 \cdot 3} \cdot 100\% \approx 34{,}8\%.$$

**8.** Текущая доходность – 25%; текущая доходность вложения – 37,5%.

**9.** 100 долл.

**10.** Доход по банковскому счету равен 142,8 тыс. руб., прибыль от покупки сертификата равна 144,5 тыс. руб. Выгоднее купить сертификат.

**11.** а) при отсутствии инфляции поток доходов по облигации (за вычетом налогов) – 4,2; 4,2; 9,38. Полный доход владельца облигации: $R = 4{,}2 + 4{,}2 + 9{,}38 = 17{,}78$ долл. Согласно определению (5.10) искомая доходность:

$$i = \frac{17{,}78}{92{,}6 \cdot 3} \cdot 100\% = 6{,}4\%;$$

б) с учетом инфляции потоку п. «а» будет отвечать следующая последовательность реальных доходов:

$(4{,}2/1{,}04;\ 4{,}2/1{,}04^2;\ 9{,}38/1{,}04^3)$.

Тогда полный реальный доход:

$R_{real} = 4{,}2/1{,}04 + 4{,}2/1{,}04^2 + 9{,}38/1{,}04^3 \approx 16{,}26$.

Ему соответствует реальная доходность:

$$i_{real} = \frac{16{,}26}{92{,}6 \cdot 3} \cdot 100\% = 5{,}8\%;$$

в) для расчета внутренней доходности рассмотрим по аналогии с инвестиционным проектом следующий поток платежей: – 92,6; 4,2; 4,2; 101,98. Здесь последней платеж получен вычитанием налогов из каждой компоненты суммарного дохода – купонного и за счет погашения:

$(6 - 0{,}3 \cdot 6) + (100 - (100 - 92{,}6) \cdot 0{,}3) = 101{,}98$.

Применяя Excel, найдем требуемое значение $IRR \approx 0{,}063 = 6{,}3\%$; заменяя платежи предыдущего потока их реальными значениями, придем к следующей последовательности: –92,6; 4,038; 3,882; 90,65, и, следовательно, реальная внутренняя доходность: $IRR_{\text{real}} \approx 0{,}02 = 2\%$. Как видим, расхождение последней оценки с реальным значением полной доходности (п. «б») достаточно велико. Для инвестора, использующего в своей деятельности начисления по сложному проценту, более адекватным будет ответ п. «г»).

**12.** Годовая доходность:

$$\eta = \frac{((50 - 35) \cdot 100 - 200) \cdot 12}{200 \cdot 2} \cdot 100\% = 3900\%.$$

**13.** Доходность фьючерсного контракта на покупку составляет:

$$j = \frac{0{,}5 \cdot 1000}{2800} \cdot \frac{365}{9} \cdot 100\% = 724{,}2\%.$$

**14.** Доходность от досрочной продажи «длинных» бумаг:

$$\frac{98{,}25-96{,}00}{96{,}00}\cdot\frac{365}{90}\cdot 100\% = 9{,}5\%;$$

доходность погашения «коротких» бумаг:

$$\frac{100-98{,}25}{98{,}25}\cdot\frac{365}{90}\cdot 100\% = 7{,}22\%.$$

Покупка и досрочная реализация 180-дневных векселей выгоднее, чем покупка векселя с погашением через 90 дней.

**15.** а) месячная доходность опционной сделки:

$$\frac{(10-2)\cdot 100}{2\cdot 100}\cdot 100\% = 400\%;$$

месячная доходность акции:

$$\frac{220-200}{200}\cdot 100\% = 10\%;$$

б) очевидно, что при падении курса месячная доходность опционной сделки составит отрицательную величину (–100%), а доходность вложения в акцию также будет отрицательна и равна – 10%.

**16.** В случае простого процента банковская ставка должна быть не менее: $\frac{85\cdot 2+26}{2\cdot 974}=0{,}1006=10{,}06\% \approx 10{,}1\%.$

**17.** Решение в соответствии с табл. 5.3.

Таблица 5.3

| Текущий доход | Текущая доходность | Капитальный доход | Доходность продажи | Полный доход | Полная доходность |
|---|---|---|---|---|---|
| 3000 | 30% | 5000 | 50% | 8000 | 80% |

**18.** 13,98%.

**19.** 18,4%; досрочное погашение проводится по цене выше номинала. Разница называется премией за досрочное погашение. Фирмы обычно погашают свои облигации досрочно, заменяя их новыми, в условиях существенного снижения ссудного процента.

**20.** Продать.

**21.** Ежегодные переплаты по облигации в сравнении с депозитом составляют:

$\varepsilon = (0{,}12 - 0{,}1)\cdot 1000 = 20.$

Поток этих «выигрышей» образует простую годовую ренту, за которую покупатель облигации должен заплатить ее продавцу премию, равную современной величине этого потока:

$$E = 20 \cdot \alpha(10,10\%) \approx 20 \cdot 6{,}1446 \approx 122{,}89 \text{ руб.},$$

т.е. купить облигацию по теоретически справедливой цене $P = 1122{,}89$ руб.; см. также задачу 3 из раздела аналитических задач.

**22.** а) ставка простого процента:

$$i = \frac{((20/2)+100-105{,}23)}{105{,}23} \cdot \frac{12}{3} \approx 0{,}1813 = 18{,}13\%;$$

б) ставка сложного процента:

$$r_{ef} = \left[\frac{110}{105{,}23}\right]^4 - 1 \approx 0{,}194 = 19{,}4\%.$$

**23.** Для отыскания искомой доходности запишем следующую таблицу денежных потоков по каждому из пакетов облигаций и по их совокупности (табл. 5.4).

Таблица 5.4

| Облигации | Число лет | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 |
| А | –3600 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 4200 | – |
| Б | –2700 | – | 180 | – | 180 | – | 180 | – | 180 | – | 180 | 3180 |
| В | –1000 | – | 80 | – | 80 | – | 1080 | – | – | – | – | – |
| Σ | –7300 | 200 | 460 | 200 | 460 | 200 | 1460 | 200 | 380 | 200 | 4380 | 3180 |

Определим внутреннюю норму доходности результирующего потока (в расчете на полугодовой период). Вычисляя с помощью Excel, найдем $IRR \approx 0{,}053 = 5{,}3\%$, или в расчете на год 10,6% по простому проценту и соответственно 10,9% с учетом разовой капитализации (по сложному проценту).

**24.** а) 12,5%; б) акции компании недооценены, поэтому их следует покупать.

**25.** а) согласно формуле (5.17) облигации будут приобретаться по номинальной стоимости при условии, что купонная ставка $\eta$ совпадает со ставкой реинвестирования $i$. Отсюда получим, что $\eta_1 = 0{,}1$, а $\eta_2 = 1{,}1^2 - 1 = 0{,}21$, и, следовательно, $\eta_1/\eta_2 = 0{,}1/0{,}21 \approx 0{,}476 = 47{,}6\%$; б) поток погашения купонной облигации такой же, как у кредитной схемы с равными процентными выплатами. Отсюда понятно, что годовые доходности $j_1 = 1{,}1^4 - 1 \approx 0{,}46$; $j_2 = 1{,}21^2 - 1 \approx 0{,}46$ одинаковы и равны 46%.

### Аналитические задачи

**1.** $$P = \frac{D(1+g)}{r-g} = \frac{D_1}{r-g},$$

где $D_1$ – первый дивиденд к получению. Данная формула имеет смысл при $r > g$ и называется моделью Гордона.

**2.** $$P = \frac{d}{[(1+i)^{1/p} - 1]}.$$

**3.** Пусть $E = P - N$, где $P$ – оценка курсовой стоимости (5.17). Если $E > 0$, то разность представляет собой премию, если $E < 0$, то эта величина означает дисконт. Доказываемая формула имеет вид

$$E = \frac{\eta - i}{i} \cdot (N - N(1+i)^{-n}) = N(\eta - i) \cdot \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}.$$

Правая часть этой формулы допускает наглядную интерпретацию в терминах современной величины потока постоянных платежей, равных разности между купонным доходом $\eta N$ и процентными деньгами $iN$.

**4.** $$R_p(\%) = \frac{\sum(Q_i - P_i)m_i}{\sum P_i m_i} \cdot 100\%.$$

Эту же доходность можно представить как взвешенную по долям вложения в каждый вид акции сумму их доходностей:

$$R_p(\%) = \sum\left(\frac{Q_i - P_i}{P_i} \cdot 100\%\right) \cdot \left(\frac{P_i m_i}{\sum P_j m_j}\right).$$

**5.** $\varphi(S, K) = \max(0, S - K)$.

**6.** Условие целесообразности состоит в том, чтобы получить положительную прибыль:

$$\Pi = \frac{\rho_0(1+j)}{F} - (1+d) > 0.$$

Отсюда следует ограничение на доходность $j$:

$$j > \frac{F}{\rho_0}(1+d) - 1.$$

Здесь в качестве периода начисления процентов принят срок валютного кредита.

**7.** Данному портфелю соответствует следующий денежный поток.

| Год, $t$ | 0 | 1 | ... | $j$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Поток | $-\Sigma m_j Q_j$ | $m_1 N_1$ | ... | $m_j N_j$ | ... | $m_n N_n$ |

Искомая доходность $i$ является внутренней нормой прибыли этого потока, т. е. характеристикой *IRR*. Ее величина определяется из уравнения

$$\sum_{t=1}^{n} m_t N_t (1+i)^{-t} - \sum_{i=1}^{n} m_i Q_i = 0.$$

Для решения этого уравнения можно воспользоваться соответствующей финансовой функцией Excel.

**8.** Оценку рыночной стоимости находим по формуле современной величины полного потока доходов:

$$P = \frac{\eta N}{(1+i_1)} + \frac{\eta N}{(1+i_1)(1+i_2)} + \frac{\eta N + N}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}.$$

**9.** $k^* = g + \dfrac{D}{P}.$

**10.** а) темп прироста дивидендов $g_t$ не меняется во времени и определяется величиной $g = \alpha \cdot (1 - \rho)$;

б) $P = D_0 \cdot \left[\dfrac{1+\alpha \cdot (1-\rho)}{r - \alpha \cdot (1-\rho)}\right] = D_1 \cdot \left[\dfrac{1}{r - \alpha \cdot (1-\rho)}\right].$

**11.** $g_t = g + r_t + gr_t$, $t = 1, 2, ..., T$.

## Ситуационные задачи

**1.** Цена каждой акции увеличилась на 100%.

**2.** а) согласно условиям задачи:

Номинал выпуска = Инвестиции в основной капитал +
+ Вложение в оборотный капитал + Затраты на эмиссию.

Это соотношение дает следующее уравнение для определения номинала выпуска:

$N = 6400 + 1300 + 1000 + 2100 + 0{,}012025N$, или $0{,}987975\ N =$ $= 10800$ тыс. руб.

Отсюда

$N = 10931450$ руб. б) $n = 10931450/1000 \approx 10930$ штук.

**3.** Минимальный срок достигается при ежегодных взносах в погасительный фонд, равных чистой прибыли. Ее величина:

$$\pi = (1 - \text{Ставка налога}) \cdot (\text{Выручка} - \text{Полные затраты} - \text{Купонная выплата}) = 0{,}76 \cdot (39100 - 31700 - 0{,}16 \cdot 10931{,}45) = 4294{,}73 \text{ тыс. руб.}$$

Применяя функцию Excel для расчета общего количества периодов выплаты 4294,73 с балансом будущей наличности 10931,45, найдем, что требуемое число периодов равно 2,3261. Отсюда следует, что в расчете на минимальный срок обращения облигации должны быть трехгодичными. Так как $3 > 2{,}3261$, то, например, последний взнос можно уменьшить. Будущая стоимость трехгодичной ренты $FV =$ $= 14772{,}15$ превышает номинал на величину $\Delta = 14772{,}15 - 10931{,}45 =$ $= 3840{,}7$. Чтобы устранить этот избыток, достаточно уменьшить третий взнос в погасительный фонд на величину

$d = 3840{,}7/1{,}14 = 3369{,}03$,

т.е довести его до величины:

$R = 4294{,}73 - 3369{,}03 = 925{,}7$ тыс. руб.

**4.** Если налоги не учитывать, то у Сидорова через год будет 1300 руб. Эта сумма включает остаток при покупке (100), дивиденды (100) и выручку от продажи (1100). Уплаченные им налоги составят:

$T = 0{,}003 \cdot 900 + 0{,}003 \cdot 1100 + 0{,}13 \cdot 100 + 0{,}13 \cdot (1100 - 900) =$ $= 45$ руб.

За вычетом налогов у Сидорова останется 1255 руб. По сравнению с Петровым его капитал больше в 1,255 раза.

**5.** а) для решения можно воспользоваться ответом аналитической задачи 1. Применяя полученную в этой задаче формулу, найдем стоимостную оценку Федора:

$$P_\phi = \frac{30(1+0{,}05)}{0{,}14-0{,}05} = 350;$$

б) ту же формулу можно использовать для приведения прогнозируемого Михаилом бесконечного потока с темпом роста 104%:

$$P_M^{(3)} = \frac{30 \cdot 1{,}2^3 \cdot 1{,}04}{0{,}14 - 0{,}04} = 539{,}136.$$

В результате интересующую его оценку получим как текущую стоимость потока из трех платежей:

$R_1 = 30 \cdot 1{,}2$; $R_2 = 30 \cdot 1{,}2^2$; $R_3 = 30 \cdot 1{,}2^3 + 539{,}136$.

Таким образом, при ставке дисконтирования в 14% оценка Михаила

$P_м \approx 463{,}71$.

**6.** Теоретически справедливая цена акции равна текущей стоимости потока получаемых по ней дивидендов. Применяя формулу из ответа к аналитической задаче 10, найдем, что эта цена:

$PV = 12 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot (1 - 0{,}4))/(0{,}12 - 0{,}15 \cdot (1 - 0{,}4)) = 436$.

Сравнивая ее с курсом, определим: $NPV = 436 - 477 = -41$. Так как $NPV < 0$, то акции рынком переоценены, и инвестировать в них невыгодно.

**7.** а) за 180 дней до погашения ожидаемая цена продажи годичной облигации будет такой же, как и текущая цена 180-дневной облигации. Купив короткие облигации, Иванов на дату их погашения 14 июля получит сумму: $S_1 = 34200 \cdot 1000/950 = 36000$. При вложении в годичные облигации и их досрочной продаже его выручка составит величину $S_2 = 950 \cdot 34200/900 = 36100$. Откуда видно, что игра на кривой доходности выгоднее, чем покупка 180-дневных бумаг; б) $r_{180} = (1000/950)^2 - 1 = 0{,}108 = 10{,}8\%$; $r_{365} = (1000 - 900)/900 = 0{,}11 = 11\%$; $r_{\text{кривая доходности}} = (950/900)^2 - 1 = 0{,}114 = 11{,}4\%$.

**8.** а) 62,5%; б) ЭФР = (0,43 – 0,625) · 0,4/0,6 = –0,13 = –13%.

## Тесты

**1.** (4). **2.** (1). **3.** (2). **4.** (2); (5). **5.** (2); (3); (5). **6.** (1). **7.** (2). **8.** (1); (4). **9.** (4). **10.** (1). **11.** (4). **12.** (1). **13.** (2). **14.** (2). **15.** (2). **16.** (2). **17.** (3). **18.** (2). **19.** (3). **20.** (2). **21.** (3).

# Раздел 6
# ФИНАНСОВЫЕ РИСКИ И ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ

## 6.1. Основные понятия и формулы

До сих пор мы имели дело с задачами, для решения которых не требовалось учитывать действие стохастических факторов и вероятностный характер финансового рынка и инвестиционных процессов. Вместе с тем, реальность такова, что фактические реализации найденных решений могут отличаться от предписанных этим решениям «средних» вариантов. Вызванные данными расхождениями потери, а возможно, и приобретения зависят от меры случайности рассогласований, а также от их амплитудных характеристик (величины рассогласований). В финансовой сфере это несоответствие ожиданиям порождает так называемый *финансовый риск*, обусловленный влиянием «случая» и информационной неопределенности. Рассматривая подверженный финансовому риску результат в зависимости от вызывающих его причин, придем к понятию *факторов риска*. Иначе говоря, результат – функция, а факторы риска – ее аргументы. В общем случае числовые значения этих аргументов – случайные величины, и, следовательно, риск результата частично зависит от риска учитываемых факторов, а его оставшаяся часть объясняется влиянием «внешней» случайности.

В условиях риска будущий результат взвешивается по двум критериям: один дает прогнозную характеристику (математическое ожидание), а другой – меру изменчивости (дисперсию). Выбор действий зависит от оценки согласования этих разнонаправленных критериев; как правило, рисковость варианта возрастает с ростом ожидаемой результативности. При этом стремление к наивысшему ожидаемому результату сдерживается опасениями его высокой колеблемости. На что решится оперирующая сторона, зависит от ее отношения к риску, от того, в каких отношениях она готова обменять дополнительные порции риска на дополнительные порции выигрыша.

Вместе с тем дисперсия – это лишь один из возможных измерителей риска. В приложениях, а также в финансовой теории имеется множество других показателей, в том числе основанных на вычислении вероятностей, например, нежелательных событий, а также косвенные измерители, числовые значения которых корреспондируют с финансовой надежностью хозяйствующих субъектов, и прочие.

### 6.1.1. Меры риска

#### Характеристики рассеяния

*Дисперсия.* При действии стохастических причин любое конкретное значение финансового результата $r$ является реализацией определенной случайной величины $R$. При этом ожидаемый результат оценивается математическим ожиданием $M(R)$, а его риск – дисперсией $D(R)$:

$$D(R) = M(R - M(R))^2 = M(R)^2 - (M(R))^2. \tag{6.1}$$

Чем больше дисперсия (вариация), тем в среднем больше отклонение, т.е. выше неопределенность и риск.

*Среднеквадратическая характеристика риска.* Зачастую за степень рискованности принимают также величину *среднеквадратического отклонения* (СКО)

$$\sigma(R) = \sqrt{D(R)}, \tag{6.2}$$

называемую риском анализируемого показателя $R$: дохода, эффективности вложения и т. д. в зависимости от конкретного содержания.

***Оценка риска акции во времени.*** Для оценивания риска в зависимости от длительности временного периода опираются на математическое описание ценовой динамики акций, принятое в известной модели Блэка–Шоулса. В ее обозначениях риск акции $\sigma$ измеряется стандартным отклонением доходности, представленной как непрерывно начисляемый процент в расчете на год (в виде десятичной дроби), а $\mu$ – ожидаемое значение годовой ставки. Согласно свойствам этой модели математическое ожидание доходности и ее риск достигнут за время $T$ (в долях года) значений:

$$\mu(T) = \mu T; \quad \sigma(T) = \sigma \cdot \sqrt{T}. \tag{6.3}$$

Опираясь на эти формулы, можно переходить от оценок дисперсии, а значит, и риска для одного периода к оценкам в расчете на другой период. Например, для определения годовой дисперсии по известной недельной дисперсии ее следует умножить на 52.

Вместе с тем соотношения (6.3) весьма приближенны, что подтверждается реальными данными, и простота предлагаемого способа противоречит точности получаемых с его помощью характеристик.

*Коэффициент вариации.* Для результата, задаваемого объемными показателями (доход, валовой выпуск, издержки и т.д.), в качестве информативной меры риска используется такая относительная характеристика рассеяния, как коэффициент вариации:

$$\xi(R) = \frac{\sigma(R)}{M(R)}. \tag{6.4}$$

Если же показатель R дает относительную характеристику результата, например доходность, то для измерения риска достаточно ограничиться абсолютной мерой рассеяния $\sigma(R)$.

*Среднее абсолютное отклонение.* Этот показатель основан на оценивании линейных уклонений случайных значений результата $R$ от его математического ожидания:

$$\rho(R) = M|R - M(R)|. \tag{6.5}$$

Связь между линейным $(R - M(R))$ и квадратичным отклонениями $(R - M(R))^2$ устанавливается с помощью известного неравенства Чебышева. Согласно ему, вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не меньше, чем на заданный допуск $\delta$, не превосходит ее дисперсии, деленной на $\delta^2$:

$$\text{Вер}(|R - M(R)| \geq \delta) \leq \frac{D(R)}{\delta^2}.$$

*Полудисперсия.* Эта мера риска учитывает рассеяние только в сторону неблагоприятных значений. Для максимизируемого показателя отклонения в меньшую сторону от его среднего значения сопряжены с риском потерь, а движения в противоположном направлении дают выигрыши и определяют уже не риски, а шансы. Полудисперсия эти положительные сдвиги не учитывает, они приравниваются нулевым значениям, а вычисляется только по отрицательным отклонениям $(R - M(R)) < 0$. Для дискретной случайной величины $R = r_i$ с вероятностью $p_i$ этот измеритель риска определяется суммой взвешенных по вероятностям значений квадратов неблагоприятных отклонений от среднего $M(R) = m$:

$$D_{\frac{1}{2}} = \sum_{r_i < m} p_i (r_i - m)^2. \tag{6.6}$$

Аналог этого показателя для непрерывной случайной величины рассчитывается интегрированием на области ее отрицательных уклонений с плотностью вероятностей $f(r)$ в роли весовой функции:

$$D_{\frac{1}{2}} = \int_{r<m} (r-m)^2 f(r) dr.$$

*Дисперсионные характеристики риска.* Эти показатели основаны на известной формуле разложения дисперсии, согласно которой

$$D(R) = DM(R/X) + MD(R/X). \tag{6.7}$$

Физический смысл составляющих дисперсии в (6.7) следующий. Дисперсия условного математического ожидания $DM(R/X)$ характеризует ту часть флуктуаций переменного результата $R$, которая вызвана влиянием фактора риска $X$. Средняя условная дисперсия $MD(R/X)$ характеризует ту часть общей дисперсии переменной $R$, которая вызвана совокупностью всех остальных факторов, кроме влияния переменной $X$.

Из приведенной трактовки следует, что измеряемый дисперсией риск разлагается на две части: риск, обусловленный влиянием учитываемого фактора $X$, и риск по всем неучитываемым факторам. Характер преобладания между учитываемыми и неучитываемыми факторами по их влиянию на риск результата устанавливается в зависимости от сопоставления величины вклада каждого из слагаемых в сумме (6.7).

Для множественного случая формула (6.7) может быть представлена следующим образом:

$$DR = DM(R/X_1, ..., X_n) + MD(R/X_1, ..., X_n),$$

где слагаемые имеют схожую интерпретацию, но применительно не к одному, а к $n$ выделенным факторам риска $X_1, ..., X_n$.

*Размах (разность между наибольшим и наименьшим значениями).* Если все сведения о возможных значениях сводятся лишь к заданию диапазона $R \in [a, b]$ без указания каких-либо вероятностных характеристик, говорят о риске неопределенности.

Допустим, что результат $R$ зависит от $n$ факторов $X_1, ..., X_n$ с известными границами изменения каждого фактора. При таком задании информации вопрос о проведении финансовой операции можно моделировать известными схемами игры с природой, а в качестве измерителя рисков опираться на максимумы потерь по отношению к наилучшим в различных состояниях природы решениям.

## Вероятностные риски

*Уклонения при вероятностях.* Статистические меры риска (6.1) – (6.7) определяются по всему диапазону изменения случайного параметра $R$ и фактически являются скалярной сверткой двух характеристик риска: уклонения от ожидаемого значения и его вероятности. Зачастую в приложениях маловероятными значениями $R$ можно пренебречь и использовать для оценки риска либо вероятность изменения параметра $R$ в заданной области, либо выявление области, в которой этот параметр будет изменяться с заданной вероятностью.

Соответствующие характеристики риска можно получить по результатам обработки эмпирических данных исходя из гистограммы относительных частот или используя аппроксимацию нормальным распределением с заданными моментами $m = M(R)$ и $\sigma^2 = D(R)$:

$$\text{Вер}(|R - m| < \delta) = 2\Phi\,(\delta/\sigma), \tag{6.8}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/2} dz$ – функция Лапласа.

*Величина при риске* (Value at risk – VAR). Оценки риска отклонениями от среднего в обе стороны характеризуют риск нестабильности. В общем случае нестабильность может порождаться как нежелательными, так и выигрышными расхождениями от среднего. Для учета только неблагоприятных уклонений можно использовать квантильные характеристики распределения вероятностей и найти такое δ, что для заданного уровня значимости $p$, например 95%:

$$\text{Вер}(m - R < \delta) = p. \tag{6.9}$$

Величина (δ) позволяет с заданной доверительной вероятностью ($p$) предсказать уровень максимально возможных потерь на временном периоде, для которого оценивается риск. Полученная таким образом оценка называется величиной при риске (VAR) и определяет потери при наихудшем стечении обстоятельств. Для достаточно высокого уровня значимости $p$ потери, превосходящие числовое значение VAR, соответствуют пренебрежимо редким событиям и, принимая инвестиционные решения, их можно не учитывать.

Прикладные VAR модели различаются в зависимости от выбранной числовой характеристики потерь и вида ее вероятностного распределения, длительности целевого периода, назначаемого уровня доверительной вероятности и методами расчета: по относительным частотам, с использованием моментных характеристик или с помощью имитационного моделирования.

*Риск разорения.* Этот риск порождается такими большими «минусовыми» отклонениями ($R < M(R)$), которые не оставляют возможности рискующему их компенсировать. Вероятность осуществления подобного события определяет меру риска разорения.

Пусть $W$ – начальный капитал инвестора, который получает случайный доход $R$. За меру риска его деятельности можно принять вероятность разорения. Тогда стремление инвестора к минимизации этого риска побуждает его к поиску таких решений, которые дают максимум вероятности неразорения: $\text{Вер}(R + W \geq 0) \to \max$.

*Риск актива* – это вероятность его пропажи либо возврата не в полном объеме. В частном случае кредита говорят о кредитном риске.

*Риск обязательств* определяется вероятностью их непогашения или погашения не в полном объеме.

*Депозитный риск*. Так называется вероятность досрочного отзыва депозитов.

### Показатели риска в виде отношений

Подобные характеристики применяют в связи с влиянием, которое оказывает на риск один из показателей *А* в зависимости от соотношения его величины с числовым значением другого показателя *В*. Чтобы снизить риск, коэффициент, равный отношению этих показателей, ограничивают некоторым приемлемым пороговым значением $\xi$:

$$\text{К} = A/\,\text{П} < \xi \text{ или } > \xi,$$

где знак неравенства выбирается в зависимости от смысла сравниваемых показателей. В качестве примеров показателей – отношений, являющихся факторами риска финансово-хозяйственной деятельности, уместно сослаться на понятия финансового и операционного рычагов. Существенной составляющей этих понятий являются отношение заемного и собственного капитала и, соответственно, постоянных издержек к переменным.

При превышении убытков над величиной собственного капитала (СК) возникает риск разорения. Распространенными мерами такого риска являются следующие отношения:

$$\text{К}_1 = \frac{\text{Максимум потерь}}{\text{СК}}, \quad \text{К}_2 = \frac{\text{Ожидаемые потери}}{\text{СК}}. \qquad (6.10)$$

Для избежания риска эти коэффициенты ограничивают сверху специально подобранными числами $\xi$ ($< \xi$).

Если ожидаемые потери в формуле $\text{К}_2$ рассчитываются как математическое ожидание убытков, то для коэффициента $\text{К}_1$ за оценку максимума потерь целесообразно принять величину риска (VAR) при заданном уровне значимости *p*.

В финансовом менеджменте чаще применяют обратные отношения, которые называют коэффициентами покрытия рисков и ограничивают снизу числами $\xi$ ($> \xi$).

Именно такой смысл имеет известный показатель покрытия расходов по обслуживанию заемного долгосрочного капитала:

$$H_1 = \frac{\text{Доход до выплаты процентов и налогов}}{\text{Проценты за пользование заемным капиталом}}. \quad (6.11)$$

Этот коэффициент показывает, во сколько раз валовой доход предприятия превосходит сумму годовых процентов по долгосрочным ссудам и займам.

Еще один показатель такого рода, известный как коэффициент Кука, определяется отношением

$$H_2 = \frac{\text{Собственные средства}}{\text{Активы, взвешенные с учетом риска}}. \quad (6.12)$$

Здесь в роли весов выступают риски – вероятности потери соответствующего актива, поэтому знаменатель в (6.12) имеет смысл ожидаемых по активам потерь.

## Показатель дюрации и его применение для оценки рисков

*Риск, связанный с изменением процентной ставки.* Для потока платежей $\{C_1, C_2, ..., C_T\}$ фактором риска, влияющим на его текущую стоимость $P$, является процентная ставка (ставка дисконтирования). Колебания уровня ссудного процента $r$ могут привести к неблагоприятным изменениям этой стоимости, что сопряжено с риском потери капитала и, в том числе, невыполнения обязательств. В качестве меры, оценивающей этот риск, широко применяется обобщенная характеристика последовательности платежей, которая называется *дюрацией*. Согласно определению, дюрация – это

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{C_t}{P(1+r)^t}, \quad (6.13)$$

где $P = \sum_{t=1}^{T} C_t (1+r)^{-t}$.

Формально правая часть равенства (6.13), взятая со знаком минус, является эластичностью приведенной стоимости потока по отношению к $(1 + r)$. Например, если поток платежей представлен выплатами по купону и номиналом к погашению, то данный показатель будет характеризовать процентное изменение цены облигации по сравнению с процентным изменением $(1 + r)$. При необходимости значение (6.13) можно пересчитать в числовую характеристику чувствительности на процентную ставку.

*Риск платежеспособности.* Если обозначить

$$\omega_t = \frac{C_t}{P(1+r)^t},$$

то формула дюрации приводится к виду

$$D = \sum_{t=1}^{T} \omega_t \cdot t,$$

что позволяет толковать данный показатель как средний срок платежа. Исходя из этого, в качестве меры расхождения сроков поступлений по активам (А) и выплат по пассивам (П), оценивающей риск платежеспособности, в финансовой практике используют показатель разницы средних сроков:

$$GAP = D_{\text{А}} - D_{\text{П}}.$$

### 6.1.2. Портфель ценных бумаг и его свойства

*Оптимальный портфель из рисковых ценных бумаг.* Инвестор располагает некоей суммой денег, предназначенной им для приобретения ценных бумаг на определенный промежуток времени. В конце этого промежутка он их распродает и извлекает доход за счет разницы цен. Принимая решение о видах и количествах покупаемых бумаг, инвестор стремится получить ожидаемый им доход с минимальным риском.

Эта задача решается при следующих исходных данных: известны математическое ожидание $m_j$, дисперсия $V_{jj} = \sigma_j^2$ случайной эффективности $R_j$ по каждому виду $j$ ценных бумаг ($j = 1, ..., n$), а также – ковариации этих эффективностей: $V_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) = M(R_i - m_i)(R_j - m_j)$. Удобно также ввести в рассмотрение коэффициенты корреляции:

$$r_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j};$$

с их помощью измеряется линейная связь между двумя случайными величинами $R_i$, $R_j$.

Неизвестными являются доли $x_j$ общего вложения, приходящиеся на $j$-ю бумагу. Инвестор-оптимизатор выбирает эти доли таким образом, чтобы получить портфель ценных бумаг требуемой ожидаемой доходности $m_p$ с минимальным риском $V_p = \sigma_p{}^2$. Математически этому соответствует известная из портфельной теории модель Марковица:

$$
\begin{gathered}
\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j \to \min \\
\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = m_p \\
\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
x_j \geq 0, \ \ j = 1,\dots,n
\end{gathered}
\tag{6.14}
$$

Если инвестор имеет возможность проводить операции с ценными бумагами типа коротких продаж (short sale), то в модели (6.14) требование неотрицательности переменных $x_j$ можно снять и рассматривать их без ограничения на знак.

Расчеты по модели (6.14) для различных значений доходности $m_p$ позволяют, в том числе, выявить эффективные портфели, т. е. портфели, не улучшаемые сразу по двум рассматриваемым показателям – $m_p$ и $\sigma_p$. Всем таким портфелям соответствует так называемая *эффективная траектория*. Эта линия в плоскости портфельных характеристик изображается кривой зависимости риска $\sigma_p$ (СКО) от эффективности $m_p$. Эта кривая имеет положительный наклон к оси абсцисс $m_p$ и возрастающую отдачу по оси ординат $\sigma_p$: последовательные одинаковые приросты ожидаемой доходности портфеля сопровождаются возрастающими приростами его риска (в математике такая функция называется *строго выпуклой*).

*Оптимальный портфель с безрисковой компонентой.* Формируя такой портфель, инвестор в дополнение к рисковым ценным бумагам учитывает также возможность вложений с нулевым риском и заданной эффективностью, т.е. под неслучайную ставку $r_0$. Обозначив долю таких вложений через $x_0$, придем к модели Тобина, предложенной им в порядке расширения постановки (6.14) и с теми же комментариями по поводу влияния коротких продаж на обязательность условий $x_j \geq 0$:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j \to \min$$

$$r_0 x_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j x_j = m_p \qquad (6.15)$$

$$x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0,\ j = 0,1,\dots,n$$

Для этой задачи эффективная траектория, полученная по ее решениям при различных значениях параметра $m_p$, содержит прямолинейный отрезок с началом в точке $(r_0, 0)$ и приходящий в точку касания $(m_c, \sigma_c)$ с траекторией эффективных портфелей «укороченной» задачи (6.14). Любой портфель на прямолинейном участке этой траектории получается комбинированием безрисковой инвестиции $(r_0, 0)$ с вложением в касательный портфель $(m_c, \sigma_c)$ и является оптимальным решением задачи (6.15). (Теорема об инвестировании в два фонда.) Этот вывод сохраняется и при снятии требования неотрицательности для части или всех переменных в (6.15), но уже по отношению к криволинейной эффективной траектории задачи (6.14) с тем же набором не ограниченных знаком переменных.

*Функция полезности.* Для описания инвестора в финансовой теории используется понятие функции полезности дохода: $U(R)$. Руководствуясь оценками полезности доступных рисковых альтернатив, инвестор выбирает наилучшую из них, т.е. ту, что имеет наивысшую ожидаемую полезность:

$$\max\{MU(R) \ / \ R \in \mathfrak{R}\}.$$

Вид функции полезности выбирается таким образом, чтобы ее математические свойства соответствовали основанным на реальных данных представлениям об отношении инвестора к доходу и риску. Самое важное из этих свойств, которое выполняется для различных типовых зависимостей, – вогнутость этой функции. Подобное течение кривой $U(R)$ моделирует поведение нерасположенных к риску, у которых с ростом дохода полезность растет, но потери воспринимаются ощутимее выигрышей. Можно сформулировать это свойство и так: прирост полезности денег уменьшается с увеличением их количества.

В портфельной теории широкое распространение получила квадратичная функция полезности (возрастающий участок параболы $U(R) = \alpha R + bR^2$ с ветвями вниз, $\alpha > 0$, $b < 0$) и выводимая из нее функция полезности карты кривых безразличия: $MU(R) = U(m, \sigma)$. Теоретический анализ оптимизационной задачи завершается постулатом о выборе инвестором из множества эффективных портфелей такого, который доставляет максимум функции полезности $U(m, \sigma)$. Геометрически это решение приводит в точку касания соответствующей кривой безразличия с траекторией эффективных портфелей.

*Рыночный портфель.* В том случае, когда претендентами для задачи (6.14) являются все виды торгуемых акций, касательный портфель$(m_c, \sigma_c)$ будет иметь ту же структуру, что и равновесный портфель рынка. В связи с этим его отождествляют с рыночным портфелем, а прямолинейный участок эффективной траектории называют *линией рынка капитала* (capital market line – CML). Этот термин отражает полученный в теории вывод, что все инвесторы разделяют свой капитал между двумя фондами: безрисковым и рыночным портфелем. При этом выбор пропорции, т.е. конкретной точки на прямолинейном участке эффективной траектории, определяется отношением к риску индивидуального инвестора.

Заметим, что данный вывод не охватывает всех возможных случаев в зависимости от допустимости продаж без покрытия (short sale) и величины требуемой доходности $m_p$. Например, при запрете подобных продаж и $m_p > m_c$ эффективные портфели перейдут на криволинейный участок траектории с нулевой долей вложения в безрисковую компоненту.

*Бета-коэффициент.* Эта характеристика ценной бумаги $j$ задается формулой

$$\beta_j = \frac{\operatorname{cov}(R_j, R_c)}{\sigma_c^2} = \frac{r_{jc}\sigma_j}{\sigma_c}, \qquad (6.16)$$

а ее числовое значение определяет вклад данной бумаги в дисперсию (риск) рыночного портфеля:

$$\frac{DM(R_c / R_j)}{DR_c} = \begin{matrix}\text{Относительная}\\ \text{рыночная стоимость}\end{matrix} \cdot \frac{\text{Ковариация}}{\text{Дисперсия портфеля}} =$$

$$= \begin{matrix}\text{Доля (по стоимости)}\\ \text{акций } j\\ \text{в рыночном портфеле}\end{matrix} \cdot \beta_j .$$

Заметим, что данное свойство можно перефразировать, определив вклад какой-либо акции $A$ в риск содержащего ее портфеля, необязательно рыночного. Этот вклад определяется относительным весом $x_A$ акций $A$ в портфеле и их ковариацией с доходностью портфеля $R_p$; можно также сказать – их средней ковариацией с акциями в портфеле:

$$\mathrm{cov}(R_A, R_p) = \Sigma x_j \, \mathrm{cov}(R_A, R_j), \ \Sigma x_j = 1.$$

Квадратичная регрессия случайной доходности акции $j$ в зависимости от случайной доходности рынка определяется линейной функцией

$$M(R_j / R_c) = \frac{r_{jc}\sigma_j}{\sigma_c}(R_c - m_c) + m_j, \qquad (6.17)$$

с угловым коэффициентом, равным, как следует из определения (6.16), «бета» вклада этой акции, т.е. $\beta_j$.

Пользуясь соотношением (6.16), можно определить «бета» для произвольного портфеля ценных бумаг, при этом «бета» портфеля равна взвешенной сумме «бета» его бумаг.

*Модель оценки капитальных активов (capital assets pricing model – CAPM).* Данная модель описывает равновесную взаимосвязь между ожидаемым доходом $m_j$ бумаги $j$ и ее вкладом $\beta_j$ в риск рыночного портфеля:

$$m_j = r_0 + \beta_j (m_c - r_0). \qquad (6.18)$$

*Альфа-коэффициент.* Реальные ценные бумаги могут отклоняться от прямой (6.18), отвечающей модели идеального конкурентного рынка. Соответствующие этим отклонениям невязки $\alpha_j$ между фактическими значениями ожидаемой доходности $m_{j\text{ф}}$ и модельными оценками $m_j$ называются «альфа» вклада:

$$\alpha_j = m_{j\text{ф}} - (r_0 + \beta_j(m_c - r_0)). \qquad (6.19)$$

Наблюдаемые всплески ($\alpha_j > 0$) и провалы ($\alpha_j < 0$) означают, что фактическая доходность выше или ниже теоретической, которая располагается на прямой (6.18), называемой *линией рынка ценных бумаг* (security market line –SML). Этому соответствуют недооцененные для всплесков, а для провалов переоцененные рынком бумаги. В первом случае следует ожидать роста цены, а во втором – ее снижения, что соответствует принятию гипотезы о соответствии фактической ожидаемой доходности ее прогнозу по модели (6.18).Поэтому одна из практических рекомендаций сводится к приобретению дешевых, по сравнению с теорией, бумаг ($\alpha_j > 0$) и соответственно продаже тех, которые стоят дороже, чем их теоретически справедливая цена ($\alpha_j < 0$).

*Риски: общий, рыночный, индивидуальный.* Общий риск актива $A$, будь то ценная бумага или портфель, можно разделить на две части: обусловленную влиянием рыночного портфеля (конъюнктуры рынка ценных бумаг) и ту, что не зависит от рынка и связана с изменением прочих факторов:

$$\sigma_\Sigma^2 = \beta_A^2 \cdot \sigma_C^2 + \sigma_A^2, \qquad (6.20)$$

где $\sigma_C^2$ – риск рыночного портфеля;

$\beta_A$ – «бета» актива $A$, $\beta_A^2 \cdot \sigma_C^2$ – рыночный (или систематический) риск актива $A$;

$\sigma_A^2$ – индивидуальный (или несистематический) риск актива $A$.

Разделение риска (6.20) вытекает из формулы разложения дисперсии (6.7) случайной доходности актива $A$ по влиянию доходности рыночного портфеля $R_c$. За счет диверсификации вложения можно уменьшить индивидуальный риск вплоть до получения сильно диверсифицированного актива, не имеющего этого риска ($\sigma_A^2 = 0$) и доходность которого зависит только от рыночных ситуаций.

Рыночный портфель содержит все торгуемые на рынке бумаги, т.е. предельно диверсифицирован и по структуре тождественен касательному портфелю $C$. Его риск отвечает минимальному значению критерия оптимизационной задачи (6.14) и, следовательно, неуменьшаем. Согласно модели CAPM (6.18), инвесторы вознаграждаются за рыночный риск, но их нерыночный (несистематический) риск не компенсируется.

*Рыночная модель.* Эта модель основана на гипотезе о наличии линейной статистической связи между доходностью обыкновенной акции за данный период времени (например, месяц) и доходностью по рыночному индексу:

$$R_j = a_j + b_j \cdot R_I + e_j, \qquad (6.21)$$

где $R_j$ – доходность ценной бумаги $j$ за данный период;

$R_I$ – доходность на рыночный индекс $I$ за этот же период (аналог доходности рыночного портфеля $R_c$ ($R_c \approx R_I$));

$a_j$ – коэффициент смещения;

$b_j$ – коэффициент наклона; его величина согласно гипотезе линейности и уравнению регрессии (6.17) равна значению беты: $b_j = \beta_j$;

$e_j$ – случайные с нулевым средним отклонения от детерминированной линейной связи; предполагается, что для разных бумаг они удовлетворяют условию отсутствия корреляции

$$M(e_i \cdot e_j) = 0,$$

если $i \neq j$.

Из этой модели, в частности, вытекает, что для любых двух бумаг $i, j$ ($i \neq j$) ковариация будет равна:

$$V_{ij} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot V_I, \tag{6.22}$$

где $V_I$ – дисперсия доходности по рыночному индексу (аналог дисперсии рыночного портфеля ($\sigma_C^2 \approx V_I$)).

Последнее соотношение позволяет существенно снизить размерность задачи определения ковариационной матрицы, необходимой для определения оптимального портфеля.

*Процентная ставка, скорректированная с учетом риска.* При вычислении обобщенных характеристик потоков случайных платежей временную последовательность их математических ожиданий приводят по скорректированной процентной ставке:

$$\begin{aligned} r_{\text{скор}} &= r_0 + \beta_A(m_c - r_0) = r_0 + \operatorname{cov}(R_A, R_c) \cdot (m_c - r_0)/\sigma_c^2 = \\ &= r_0 + \lambda \cdot \operatorname{cov}(R_A, R_c), \end{aligned} \tag{6.23}$$

где $\beta_A$ – бета-коэффициент актива, являющегося источником финансовых поступлений;

$R_A$ – доходность этого актива;

$\lambda = (m_c - r_0)/\sigma_c^2$ – рыночная цена риска.

Таким образом, премия инвестору за риск вложений, добавляемая к безрисковой ставке $r_0$, составляет величину

$$\pi = \beta_A(m_c - r_0) = \text{«бета»} \cdot \text{премия рынку за риск.}$$

*Платеж, скорректированный с учетом риска.* Этот способ состоит в замене ожидаемого значения $M(E)$ случайного платежа $E$ безрисковым эквивалентом по формуле

$$E_{\text{скор}} = M(E) - r_{EC} \cdot \sigma_E \cdot (m_c - r_0)/\sigma_c =$$
$$M(E) - \operatorname{cov}(E, R_c) \cdot (m_c - r_0)/\sigma_c^2 = M(E) - \lambda \operatorname{cov}(E, R_c) \qquad (6.24)$$

и сохранением ставки $r_0$ для приведения скорректированных таким образом значений. В записи (6.24) добавлены следующие обозначения: $r_{EC}$ – коэффициент корреляции платежа $E$ и доходности рыночного портфеля $R_c$, $\sigma_E$ – риск (СКО) платежа $E$.

## 6.2. Типовые примеры

1. *Меры риска ценных бумаг.*

В данный момент акции $A$ и $B$ имеют курсовые стоимости 50 и 20 руб., а их ожидаемые доходности $m_A = 12\%$, $m_B = 8\%$. Инвестор имеет 100 тыс. руб. и хочет приобрести эти акции, вложив в каждый вид половину своего капитала. В конце года он собирается их продать и получить прибыль. Определить:

а) риск каждой акции и портфеля в целом, если ковариационная матрица доходностей (в виде десятичной дроби) будет равна:

$$V_{AB} = \begin{pmatrix} 0{,}06250 & 0{,}00375 \\ 0{,}00375 & 0{,}02250 \end{pmatrix};$$

б) характеристику VAR, основанную на нормальном распределении и оценивающую максимально возможные потери капитала по уровню значимости 95%.

Решение

а) риск акции определяется величиной СКО ее доходности:

$$\sigma_A = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25; \quad \sigma_B = \sqrt{0{,}0225} = 0{,}15.$$

Чтобы найти риск портфеля $\sigma_p$, воспользуемся формулой дисперсии суммы:

$$R_p = x_A R_A + x_B R_B,$$

где $R$ – доходность, $x$ – доля вкладываемого капитала:

$$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + 2 x_A x_B \operatorname{cov}(R_A, R_B) + x_B 2 \sigma_B^2.$$

Согласно условию

$$x_A = x_B = 0{,}5, \text{ а } \operatorname{cov}(R_A, R_B) = 0{,}00375,$$

и, следовательно,

$$\sigma_p{}^2 = 0{,}5^2 \cdot 0{,}0625 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}00375 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}0225 = 0{,}023125.$$

Таким образом, риск доходности портфеля равен:

$$\sigma_P = \sqrt{0{,}023125} \approx 0{,}1521;$$

б) исходя из симметричности нормального распределения вероятностей, найдем интервал уклонения доходности портфеля от ее ожидаемого значения, задавшись уровнем значимости 0,9. Для рассматриваемого портфеля математическое ожидание его доходности составит:

$$m_P = 0{,}5 \cdot 12 + 0{,}5 \cdot 8 = 10\%.$$

Согласно (6.8)

$$\text{Вер}(|R_p - 10\%| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma_p) = 0{,}9.$$

Пользуясь таблицей значений функции Лапласа $\Phi(x)$, найдем:

$$\delta = 1{,}64 \cdot \sigma_P = 0{,}2494 = 24{,}94\%.$$

Тогда с вероятностью 0,9 данный портфель принесет доход в интервале от $-14{,}94\%$ ($10 - 24{,}94$) до $34{,}94\%$ ($10 + 24{,}94$). Таким образом, при уровне значимости $p = 0{,}9 + (1 - 0{,}9)/2 = 0{,}95$ величина при риске по показателю доходности $\text{VAR}_R = 14{,}94\%$ (максимум потерь). Откуда следует, что по величине начального капитала $\text{VAR}_I = 14940$ руб. Если считать относительно ожидаемой в конце года прибыли $M$ (П) $= 0{,}1 \cdot 100\,000 = 10\,000$ руб., то потери определят величину при риске относительно будущей стоимости портфеля $\text{VAR}_{FI} = 10000 + 14940 = 24940$ руб. Ровно столько при наихудшем стечении обстоятельств потеряет инвестор относительно прогнозируемой им величины дохода при распродаже портфеля.

2. *Дюрация как мера чувствительности.*

В настоящий момент облигация продается за 1000 руб. при доходности 8%. Ее дюрация составляет 10 лет. Насколько изменится цена этой облигации при увеличении доходности до 9%?

Решение

Согласно определению, дюрация:

$$D = \frac{\Delta P / P}{\Delta r / (1 + r)},$$

где $P$ – текущая стоимость потока платежей;
$r$ – ставка дисконтирования.

По условию задачи:

$$D = 10,\ P = 1000,\ r = 8\%,\ \Delta r = 1\%.$$

Отсюда получим следующее уравнение относительно неизвестной $\Delta P$:

$$10 = \frac{\Delta P}{1000} \cdot \frac{1 + 0{,}08}{0{,}01},$$

и, следовательно, $\Delta P = 92{,}59$ руб.

В результате измененная цена облигации приблизится к значению $P_{изм.} = 1000 - 92{,}59 \approx 907{,}4$ руб.

3. *Модель САРМ.*

На идеальном финансовом рынке 10% по стоимости составляют безрисковые бумаги и 90% – рисковые. Рисковых всего три: первые составляют 1/6 их общей стоимости и их $\beta = 0{,}8$; вторые – 1/3 и $\beta = 1$. Каковы эффективности и $\beta$ всех рисковых бумаг, средняя доходность $m_\Sigma$ и коэффициент $\beta_\Sigma$ по всему рынку, если средняя доходность по рисковым бумагам равна 8%, а безрисковая ставка равна 4%?

Решение

Эффективности первых двух бумаг получим, используя уравнение равновесного рынка (6.18):

$$m_1 = 7{,}2\%;\ m_2 = 8\%.$$

Очевидно, что доля третьих бумаг равна половине стоимости всех рисковых активов (1 – 1/6 – 1/3).

Доходность рисковой части рынка равна взвешенной доходности ее компонент:

$$8\% = 1/6 \cdot 7{,}2\% + 1/3 \cdot 8\% + 1/2 \cdot m_3.$$

Отсюда получим эффективность третьей бумаги $m_3 = 124/15$. Чтобы найти ее «бета», воспользуемся формулой (6.18):

$$m_3 = 124/15 = 4 + \beta_3 \cdot (8 - 4),$$

и, следовательно, $\beta_3 = 16/15$. Согласно условию задачи, 0,1 всего рынка составляют безрисковые бумаги, поэтому средняя доходность по всему рынку:

$$m_\Sigma = 0{,}1 \cdot 4 + 0{,}9 \cdot 8 = 7{,}6\%.$$

Структура рисковой части рынка определяется долями $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1/2$. Поэтому ее «бета»:

$$\beta_{\text{риск}} = 1/6 \cdot 0{,}8 + 1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot 16/15 = 1,$$

что согласуется с теоретическим положением: коэффициент «бета» рыночного портфеля равен единице. Показатель «бета» для рынка в целом определим с учетом доли безрисковых бумаг:

$$\beta_\Sigma = 0{,}9 \cdot \beta_{\text{риск}} = 0{,}9.$$

**4.** *Разложение риска на рыночный и индивидуальный.*

Среднеквадратическое отклонение (СКО) доходности рыночного портфеля составляет 20%. Определить:

а) риск сильно диверсифицированного портфеля, если его $\beta = 1{,}3$;

б) риск сильно диверсифицированного портфеля с нулевым значением $\beta$;

в) $\beta$ сильно диверсифицированного портфеля со стандартным отклонением (СКО) в 15%;

г) $\beta$ слабо диверсифицированного портфеля со стандартным отклонением (риском), равным 20%.

Решение

Для решения следует использовать соотношение (6.20), имея в виду, что у сильно диверсифицированного актива $A$ индивидуальный риск $\sigma_A \approx 0$. Отсюда следует, что для рассматриваемых в первых трех вопросах портфелей их риск $\sigma_\Sigma = \beta \cdot \sigma_c = \beta \cdot 20\%$. Отсюда получим следующие ответы:

а) $\sigma_\Sigma = 26\%$;

б) $\sigma_\Sigma = 0\%$;

в) $\beta = (\sigma_\Sigma = 15\%)/20\% = 0{,}75$;

г) у слабо диверсифицированного портфеля $A$ индивидуальный риск $\sigma_A > 0$, поэтому в разложении (6.20) присутствуют обе компоненты, и, следовательно, $\sigma_\Sigma > \beta \cdot \sigma_c$. Подставив в это неравенство исходные данные из п. «г», получим, что $20 > \beta \cdot 20$, т.е. $\beta < 1$.

**5.** *Касательный портфель.*

Запишите модель (6.15) для $n = 2$ и найдите касательный портфель при исходных данных:

$$r_0 = 1\%,\ m_1 = 2\%,\ \delta_1 = 1\%;\ m_2 = 3\%,\ \delta_2 = 2\%;\ r_{12} = 1/2.$$

Решение

Модель трехкомпонентного портфеля имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_p^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 r_{12} x_1 x_2 + \sigma_2^2 x_2^2 \to \min\\
&r_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_p\\
&x_0 + x_1 + x_2 = 1\\
&x_0, x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Согласно свойствам задачи (6.15), для любого портфеля на прямолинейном участке эффективной траектории отношение долей рисковых компонент будет таким же, как и у касательного портфеля $C$. Отсюда понятно, что для определения этого портфеля достаточно задаться такой правой частью $m_p^*$, для которой в оптимальном решении переменная $x_0^{\text{опт}} > 0$. Тогда доли вложения в касательном портфеле определятся в соответствии с правилом пропорционального деления в отношении

$$x_1^{\text{опт}} : x_2^{\text{опт}},$$

т.е.

$$x_{c1} = \frac{x_1^{\text{опт}}}{x_1^{\text{опт}} + x_2^{\text{опт}}},\quad x_{c2} = \frac{x_2^{\text{опт}}}{x_1^{\text{опт}} + x_2^{\text{опт}}}.$$

Используя эти данные, найдем характеристики портфеля $C$:

$$m_c = m_1 x_{c1} + m_2 x_{c2},\ \sigma_c^2 = \sigma_1^2 x^2_{c1} + 2\sigma_1\sigma_2 r_{12} x_{c1} x_{c2} + \sigma_2^2 x^2_{c2}.$$

Решим поставленную задачу средствами Excel с помощью команды **Сервис**. **Поиск решения**. Для этого введем следующие исходные данные (табл. 6.1).

Таблица 6.1

| Принятые в модели обозначения | X0 | X1 | X2 | r0 | m1 | m2 | σ1 | σ2 | r12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ячейки электронной таблицы | A3 | B3 | C3 | A6 | B6 | C6 | B9 | C9 | A12 |
| Исходные данные | 0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0,5 |

В ячейку *D*13 введем функцию цели:

= B3^2*B9^2 + C3^2*C9^2 + 2*B3*C3*B9*C9*A12;

в ячейки A16, A17 введем левые части ограничений:

= A6*A3 + B6*B3 + C6*C3;
= A3 + B3 + C3,

а в ячейки D16, D17 – правые части ограничений, которые положим равными результату, вычисленному в ячейках A16, A17 после нажатия клавиши «Enter», т.е. числам 2 и 1.

Таким образом, процесс поиска решения начинается с допустимого плана $x_0 = 0{,}5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}5$ в сторону минимизации портфельного риска $\sigma_p$ и при неизменных требованиях относительно ожидаемой доходности $m_p = 2$ и единичного бюджета.

Для определения искомого портфеля *C* воспользуемся следующим соответствием между предназначенными для его характеристик ячейками и вводимыми в них формулами. Доли в касательном портфеле представлены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

| $x_{c1}$ | $x_{c2}$ |
|---|---|
| B21 | C21 |
| =B3/СУММ(B3:C3) | =C3/СУММ(B3:C3) |

Ожидаемая доходность и риск касательного портфеля даны в табл. 6.3.

Таблица 6.3

| $m_c$ | $\sigma_c$ |
|---|---|
| A25 | B25 |
| =B6*B21 + C6*C21 | =(B21^2*B9^2 + C21^2*C9^2 + 2*B21*C21*B9*C9*A12)^0,5 |

Чтобы перейти от допустимых значений переменных к их оптимальным значениям, выберем команду **Сервис**. **Поиск решения** и заполним открывшееся диалоговое окно «Поиск решения».

«Экранизация» ввода исходных данных и элементов формализации модели, а также диалогового окна «Поиск решения» на рабочем листе Excel имеет следующий вид (рис. 6.1).

После нажатия в открывшемся диалоговом окне на кнопку **Выполнить** появляется окно «Результаты поиска решения», которое сообщает, что решение найдено (рис. 6.2).

Таким образом, в оптимальном портфеле *C* на две стоимостные единицы ценных бумаг первого вида должна приходиться одна стоимостная единица бумаг второго вида ($x_{c1} \approx 0{,}6667$; $x_{c2} \approx$ $\approx 0{,}3333$). Ожидаемая от этого портфеля доходность $m_c \approx 2{,}33\%$, а его риск $\sigma_c \approx 1{,}15\%$.

**6.** *Линии рынков капитала и ценных бумаг.*

Предположим, что ставка процента по безрисковым инвестициям равна 7%, а ожидаемая доходность вложений в рыночный портфель составляет 10% при риске 2%.

1. Рассчитать ожидаемую доходность и риск портфеля, состоящего на 0,6 из рыночного портфеля и на 0,4 из безопасных инвестиций.

2. При заданных условиях составить уравнения линии рынка капитала и линии рынка ценных бумаг. Чему равны тангенсы углов наклона каждой из линий?

3. Пусть имеется инвестиционный проект (предполагаются инвестиции в ценные бумаги), ковариация доходности которого с рыночной равна 0,00064. Определить коэффициент β, ожидаемую требуемую рынком доходность этого проекта.

4. Если в настоящий момент ожидаемая доходность инвестиций равна 0,15, то, что, по вашему мнению, должно произойти?

5. Если в настоящий момент ожидаемая доходность инвестиций равна 0,1, а корреляция определяется условием 3, то как, по

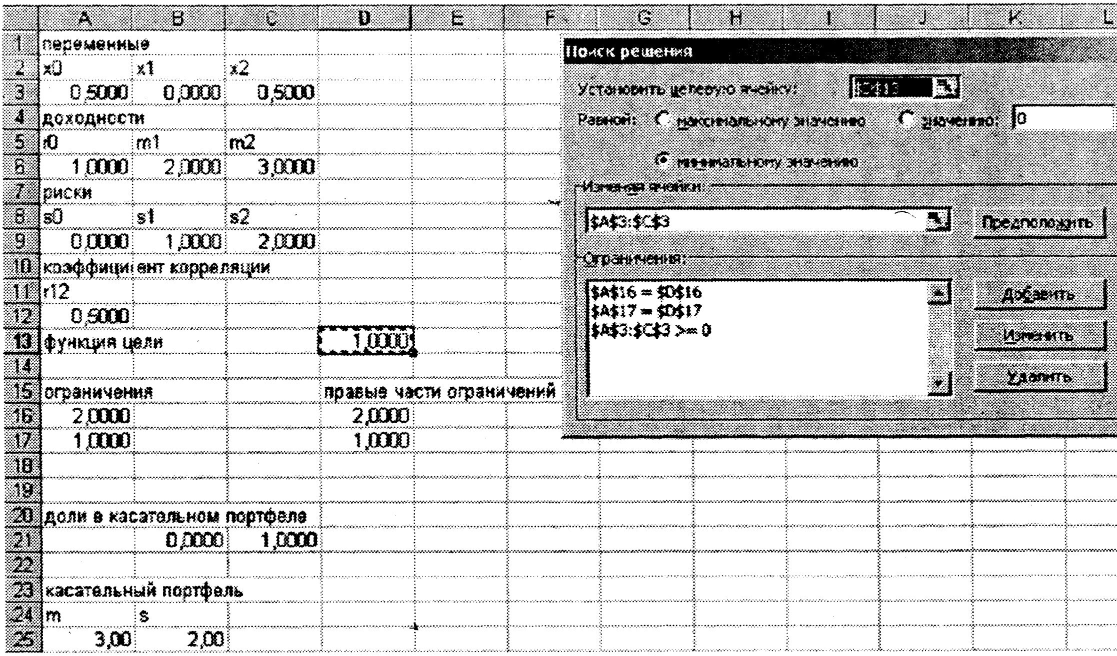


**Рис. 6.1.** Исходные данные и диалоговое окно

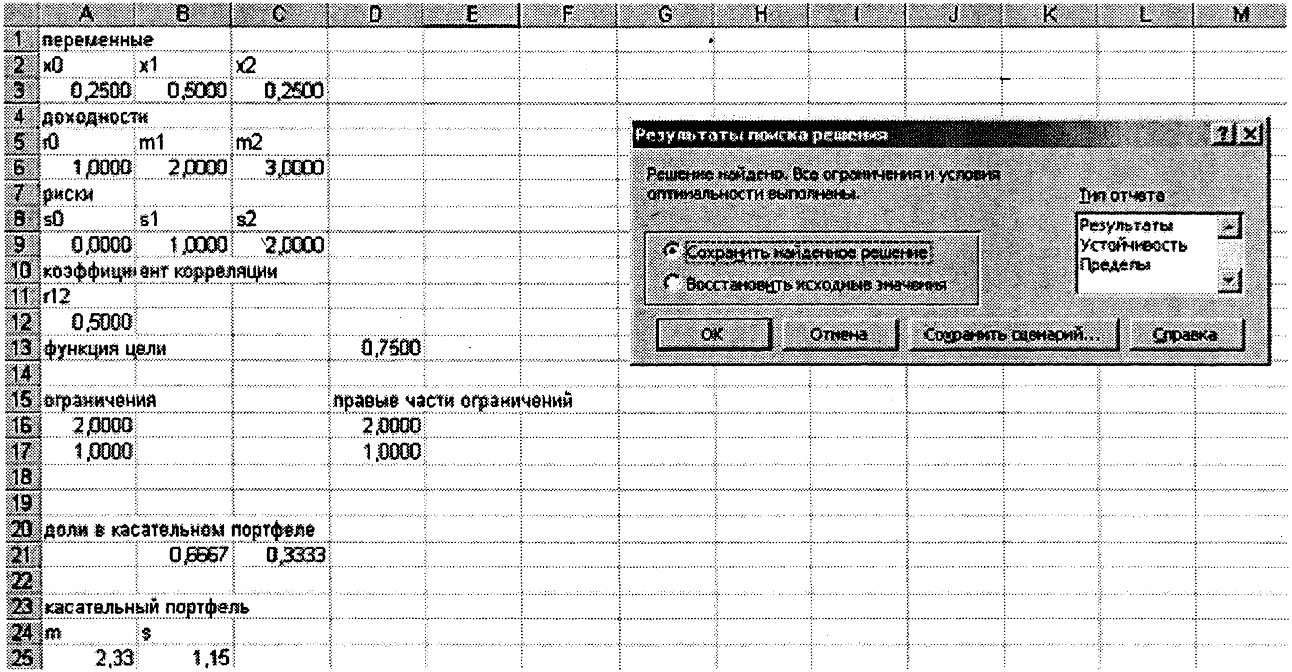


**Рис. 6.2.** Результаты поиска решения

вашему мнению, будет изменяться курсовая стоимость объекта вложений?

6. Чему равно значение $\beta$ портфеля, в котором в равных долях присутствует безрисковый актив и вложения в инвестиционный проект (п. 3)?

Решение

1. $m_p = 0{,}6 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 7 = 8{,}8\%$, $\sigma_p = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2\%$.

2. В осях «доходность – риск» линия рынка капитала определяется прямой, проходящей через две точки: одна из них соответствует безрисковому активу ($r_0 = 0{,}07$; $\sigma = 0$), другая – рыночному портфелю ($m_c = 0{,}1$; $\sigma_c = 0{,}02$): $\sigma = \frac{2m}{3} - \frac{7}{150}$.

Тангенс угла наклона этой линии к оси $0m$ равен 2/3. В осях «коэффициент бета – доходность» линия рынка ценных бумаг определяется прямой, проходящей через две точки: одна из них соответствует безрисковому активу ($\beta = 0$; $r_0 = 0{,}07$;), другая – рыночному портфелю ($\beta_c = 1$; $m_c = 0{,}1$) : $m = 0{,}03\beta + 0{,}07$. Тангенс угла наклона этой линии к оси $0\beta$ равен 0,03.

3. Подставляя данные примера в формулу (6.18), найдем ожидаемую доходность инвестиционного проекта:

$$m_{\text{проекта}} = 7\% + 0{,}00064/0{,}02^2 \cdot (10\% - 7\%) = 11{,}8\%.$$

4. Согласно условию, фактическое значение ожидаемой доходности отклоняется от теоретической оценки (6.18) на величину коэффициента $\alpha = 0{,}15 - 0{,}118 > 0$. Положительность этого коэффициента свидетельствует о том, что объект инвестиций недооценен и следует ожидать повышения его курсовой стоимости.

5. В этом случае коэффициент $\alpha = 0{,}1 - 0{,}118 < 0$ и поэтому следует ожидать снижения курсовой стоимости.

6. $\beta$ портфеля равно взвешенной сумме показателей коэффициентов $\beta$ составляющих его активов: $\beta_{\text{портфеля}} = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 1{,}6 = 0{,}8$.

Примечание. Выводы по п. 4 и 5 основаны на сравнении следующих текущих стоимостей:

$$\text{ТС}_{\text{тсор}} = P/(1 + 0{,}118),\ \text{ТС}_4 = P/(1 + 0{,}15),\ \text{ТС}_5 = \\ = P/(1 + 0{,}1);\ \text{ТС}_4 < \text{ТС}_{\text{тсор}} < \text{ТС}_5.$$

7. *Рыночная модель.*

Дисперсия доходности по индексу рынка равна 490, а ковариация ценных бумаг $A$ и $B$ – 470. Чему равняется «бета» ценной бумаги *B*, если известно, что «бета» ценной бумаги *A* равняется 1,2?

Решение

По свойству (6.22) рыночной модели

$$\beta_B = \frac{V_{AB}}{\beta_A \cdot V_I} = \frac{470}{1{,}2 \cdot 490} \approx 0{,}8.$$

**8.** *Платеж с поправкой на риск.*

Инвестор анализирует целесообразность приобретения сроком на один период акций *A*. Согласно прогнозам, в конце периода на рынке ценных бумаг возможны две ситуации, и на каждую из них акция *A* откликается неслучайным образом. Известны вероятности этих исходов и соответствующие им значения случайной эффективности рынка и случайного курса акции (табл. 6.4).

Таблица 6.4

| Исход | Вероятности | Эффективность рынка, $R_c$ | Курс акции, $E$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,8 | 0,2 | 432 |
| 2 | 0,2 | 0,00 | 108 |

Пусть доходность $r_0$ безрисковых ценных бумаг составляет 8%. Определить оценку теоретически справедливой текущей стоимости акции *A* методом корректировки ожидаемого платежа.

Решение

Используя табличные данные, найдем математическое ожидание и дисперсию рыночной доходности:

$$m_c = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16;$$
$$\sigma_c^2 = M(R_c)^2 - m_c^2 = 0{,}8 \cdot (0{,}2)^2 - (0{,}16)^2 = 0{,}0064.$$

После этого вычислим параметр λ, учитывающий поправку на риск в формуле безрискового эквивалента (6.24):

$$\lambda = (0{,}16 \cdot 0{,}08)/0{,}0064 = 12{,}5.$$

Для определения этого эквивалента найдем ковариацию рыночной доходности $R_C$ и случайного курса $E$:

$$\operatorname{cov}(E, R_C) = M(E - M(E))(R_c - m_c),$$

где $M(E) = 0{,}8 \cdot 432 + 0{,}2 \cdot 108 = 367{,}2$, $m_c = 0{,}16$.

Очевидно, что

$$M(E - M(E))(R_c - m_c) = M(E \cdot R_c) - M(E) \cdot m_c.$$

На основании этого:

$$\operatorname{cov}(E, R_c) = (0{,}8 \cdot 432 \cdot 0{,}2 - 367{,}2 \cdot 0{,}16) = 10{,}368.$$

Подставляя данное значение и величину $\lambda$ =12,5 в формулу (6.24), получим величину скорректированного платежа:

$$E_{\text{скор.}} = 367{,}2 - 12{,}5 \cdot 10{,}368 = 367{,}2 - 129{,}6 = 237{,}6.$$

Дисконтируя ее по безрисковой ставке, придем к справедливой цене:

$$\text{ТС} = \frac{237{,}6}{1{,}08} = 220.$$

Если текущий курс акции меньше 220, то ее следует покупать, если же акция переоценена рынком, т.е. ее курсовая стоимость превышает найденную нами оценку, от покупки лучше воздержаться.

Примечание. Найденной оценке соответствует теоретически справедливая доходность акции $R_A = (E - \text{ТС})/\text{ТС}$, которая используется для расчетов скорректированной ставки (6.23):

$$r_{\text{скор}} = r_0 + \lambda \cdot \operatorname{cov}((E - 220)/220, R_c) = 0{,}08 + 12{,}5 \cdot \operatorname{cov}(E, R_c)/220.$$

Согласно выполненным выше вычислениям, $\operatorname{cov}(E, R_c) = 10{,}368$ и, следовательно, $r_{\text{скор.}} = 0{,}08 + 12{,}5 \cdot 10{,}368/220 \approx 0{,}6691$. Дисконтируя ожидаемую величину платежа $M(E)$ по этой ставке (по рыночной цене капитального актива), получим тот же ответ, что и при решении задачи:

$$\text{ТС} = 367{,}2/1{,}6691 \approx 219{,}9988.$$

**9.** *Процентная ставка с поправкой на риск.*

Проект стоит 3 млн руб., рассчитан на 1 год с ожидаемой отдачей в размере 4,5 млн руб. и имеет «бету», равную 2,0. Рыночная премия за риск $(r_c - r_0)$ составляет 8%, а текущая безрисковая ставка равна 7%. Используя модель оценки долгосрочных активов (6.18), найти:

а) альтернативные издержки;

б) приведенную стоимость проекта.

Решение

а) по формуле (6.23) альтернативная ставка

$$r = 7 + 2 \cdot 8 = 23\%;$$

б) дисконтируя по скорректированной с учетом риска ставке $r = 23\%$, получим приведенную стоимость проекта:

$$NPV = -3 + 4{,}5/1{,}23 \approx 0{,}658536 \text{ млн руб.}$$

## 6.3. Задачи для самостоятельного решения

### Расчетные задачи

**1.** Портфель состоит из двух пакетов акций стоимостью 3000 тыс. руб. и 2000 тыс. руб. Ожидаемая доходность по первому пакету составляет 12%, а по второму – 16%. Какова ожидаемая доходность портфеля в целом?

**2.** В начале года инвестор владел четырьмя видами ценных бумаг в следующих количествах и со следующими текущими и ожидаемыми к концу года ценами (табл. 6.5).

Таблица 6.5

| Ценная бумага | Количество акций | Текущая цена, долл. | Ожидаемая цена к концу года, долл. |
|---|---|---|---|
| *A* | 100 | 50 | 50 |
| *B* | 200 | 35 | 40 |
| *C* | 50 | 25 | 50 |
| *D* | 100 | 100 | 110 |

Какова ожидаемая доходность этого портфеля за год?

**3.** Инвестор желает приобрести 10-летние бескупонные облигации сроком на 1 год с погашением по номиналу. Согласно структуре процентных ставок, годовая доходность к погашению ожидается на уровне 7%, а ее волатильность (СКО) – 15%. Опираясь на нормальный закон распределения доходности, получить следующие оценки:

а) найти интервал, внутри которого сосредоточены 98% возможных уклонений итоговой за год доходности $r$ от ее среднего значения (98%-й доверительный интервал);

б) при том же уровне значимости (98%) определить диапазон возможных годовых приростов $\Delta$ (выигрышей или потерь) начальных вложений в размере 1 млн руб.;

в) как изменится доверительный с тем же уровнем значимости интервал по доходности и приростам капитала для диапазона дальновидности инвестора, равного 30 дням;

г) оцените величину максимально возможных потерь (VAR) при условии, что инвестор пренебрегает вероятностями неблагоприятных исходов ниже 0,01.

**4.** При вложении капитала в мероприятие $A$ в 20 случаях из 200 была получена прибыль в 25 тыс. руб., в 80 случаях – 30 тыс. руб., в 100 случаях – 40 тыс. руб. При вложении капитала в мероприятие $B$ в 144 случаях из 240 была получена прибыль 30 тыс. руб., в 72 случаях – 35 тыс. руб., в 24 случаях – 45 тыс. руб. Выбрать вариант вложения капитала:

а) по критерию средней прибыли;

б) по критерию колеблемости прибыли;

в) по критерию относительной колеблемости прибыли

**5.** Выбрать наименее рискованное направление инвестиций из двух возможных вариантов:

а) собственные средства инвестора – 5 млн руб., максимально возможная сумма убытков – 3,5 млн руб.;

б) собственные средства инвестора – 30 млн руб., максимально возможная сумма убытков – 12 млн руб.

**6.** Инвестор выбирает между двумя акциями $A$ и $B$. Каждая из них по-своему откликается на возможные рыночные ситуации, достигая с известными вероятностями определенных значений доходности (табл. 6.6).

Таблица 6.6

| Акция | Вероятность | Доходность | Вероятность | Доходность |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0,5 | 20% | 0,5 | 10% |
| $B$ | 0,99 | 15,1% | 0,01 | 5,1% |

Какую акцию выберет не склонный к риску инвестор?

**7.** Предположим, что на рынке могут возникнуть только два исхода и на каждый из них акции *A* и *B* откликаются неслучайным образом. Вероятности этих исходов и соответствующих им значений доходности заданы табл. 6.7.

Таблица 6.7

| Акция | Исход 1 | | Исход 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | Вероятность | Доходность | Вероятность | Доходность |
| *A* | 0,2 | 5% | 0,8 | 1,25% |
| *B* | 0,2 | – 1% | 0,8 | 2,75% |

Определить:

а) ожидаемые доходности и риски (стандартные отклонения) этих акций;

б) коэффициент корреляции между доходностями;

в) какую акцию выберет инвестор, максимизирующий вероятность неразорения, учитывая, что инвестируются заемные средства, взятые под ставку 1,5%;

г) как распределить вложения, чтобы получить безрисковую комбинацию этих акций – портфель с не зависящей от исхода эффективностью.

**8.** Инвестор вложил 60% своего капитала в акцию *A*, а оставшуюся часть – в акцию *B*. Риски этих акций составляют соответственно 10 и 20%. Чему равен риск портфеля, если:

а) доходности этих бумаг находятся в полной прямой корреляции;

б) доходности некоррелированы;

в) имеет место положительная статистическая связь с коэффициентом корреляции 0,5.

**9.** Портфель состоит из активов *A* и *B*. Доля актива *A* – 40%, актива *B* – 60%. Дисперсии активов

$$\sigma_A^2 = 0{,}0012184,\ \sigma_B^2 = 0{,}000987.$$

Коэффициент корреляции:

$$r_{AB} = 0{,}0008765.$$

Чему равен риск портфеля?

**10.** Используя Excel, найти оптимальный портфель Марковица требуемой доходности $m_p$ = 15% для трех некоррелированных ценных бумаг, эффективности и риски которых заданы следующими парами значений: 4, 10; 10, 40; 40, 80.

**11.** Для формирования портфеля ценных бумаг можно использовать три вида акций, которые имеют следующие характеристики (табл. 6.8).

Таблица 6.8

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ожидаемая доходность | $m_1 = 12\%$ | $m_2 = 10\%$ | $m_3 = 15\%$ |
| Риск | $\sigma_1 = 15\%$ | $\sigma_2 = 8\%$ | $\sigma_3 = 18\%$ |
| Коэффициенты корреляции | $r_{12} = 0{,}35$ | $r_{13} = 0{,}19$ | $r_{23} = 0{,}1$ |

С помощью компьютера составить 11 портфелей минимального риска и требуемой доходности $m_n = 10 + 0{,}5(n - 1)$, $n = 1, 2, ..., 11$. Затем нанести портфели, как точки, на плоскость «доходность – риск» и построить график траектории эффективных портфелей.

**12.** Инвестор может составить портфель из трех видов ценных бумаг. Их эффективности являются случайными величинами, имеющими следующие математические ожидания и стандартные отклонения:

$$m_1 = 15\%, \sigma_1 = 5\%; m_2 = 25\%, \sigma_2 = 7\%; m_3 = 20\%; \sigma_3 = 6\%.$$

Также известна корреляционная матрица этих эффективностей $((r_{ij}))$ (табл. 6.9).

Таблица 6.9

| Номер актива | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,8 | 0 |
| 2 | 0,8 | 1 | –0,2 |
| 3 | 0 | –0,2 | 1 |

Инвестор имеет возможность получать и предоставлять займы по одной и той же безрисковой ставке $r_0$=12%, а моделирующая его поведение функция полезности дохода $U(R) = 3R - 0{,}1R^2$. Определить портфель Тобина, учитывающий, наряду с рисковыми активами, возможности использования инвестором безрискового процента.

**13.** Компания финансируется на 40% за счет заемного капитала по безрисковой ставке в 10%. Акции компании имеют коэффициент β, равный 0,5. Ожидаемая доходность рыночного портфеля составляет 18%. Определить стоимость капитала компании.

**14.** Полная рыночная стоимость обыкновенных акций (собственный капитал) компании оценивается в 6 млн долл.; общая стоимость заемного капитала составляет 4 млн долл. Финансовые аналитики получили оценку «бета» вклада акций компании на уровне 1,5. Кроме того, известно, что ожидаемая премия за риск рыночного портфеля равна 9%. Данная компания привлекает заемный капитал под безрисковую ставку в 8%. Определить:

а) ожидаемую доходность акций этой компании;

б) β вклада ее активов;

в) стоимость капитала компании;

г) ставку дисконтирования для получения оценок эффективности проектов, предназначенных для расширения действующего производства;

д) ставку дисконтирования для оценки эффективности нового, задуманного компанией инвестиционного проекта с коэффициентом $\beta = 1{,}2$.

**15.** Сформировать портфель Тобина максимальной эффективности и риска, не более заданного, из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 2 и некоррелированных рисковых ожидаемой эффективности 4 и 10 и рисками 2 и 4. Каковы соотношения доли бумаг в рисковой части оптимального портфеля?

**16.** Имеются следующие данные об ожидаемых доходах и стандартных отклонениях восьми рисковых портфелей (табл. 6.10).

Таблица 6.10

| Портфель | А | Б | В | Г | Д | Е | Ж | З |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ожидаемый доход, $r$, % | 10 | 12,5 | 15 | 16 | 17 | 18 | 18 | 20 |
| Стандартное отклонение, $\sigma$, % | 23 | 21 | 25 | 29 | 29 | 32 | 35 | 45 |

Используя графическое представление этих портфелей в осях $(r, \sigma)$, требуется ответить на следующие вопросы:

а) пять из этих портфелей эффективны, три – нет. Какие портфели неэффективны?

б) допустим, что вы также можете брать кредиты и предоставлять займы по ставке 12%. Какой из приведенных портфелей является лучшим в этой ситуации?

в) предположим, вы готовы принять стандартное отклонение, равное 25%. Какую максимальную ожидаемую доходность вы можете получить при условии, что у вас нет возможности брать кредиты или предоставлять займы?

г) как изменится ваша стратегия, если у вас появится возможность кредитования и заимствования по ставке 12%. Вы по-прежнему готовы принять 25%-ный риск, но стремитесь получить максимальную ожидаемую доходность? Чему равен выигрыш по сравнению с п. «в»?

**17.** Инвестор вложил 60% своих денег в акции *A*, а остальные – в акции *B*. Он оценивает перспективы для себя следующим образом (табл. 6.11).

Таблица 6.11

| Показатель | Акция | |
|---|---|---|
| | *A* | *B* |
| Ожидаемая доходность, % | 15 | 20 |
| Стандартное отклонение, % | 20 | 22 |
| Корреляция между доходностями | 0,5 | |

Определить:

а) каковы ожидаемая доходность и стандартное отклонение портфеля?

б) как изменился бы ваш ответ, если бы коэффициент корреляции равнялся 0 или –0,5?

в) портфель инвестора лучше или хуже портфеля, полностью состоящего из акций *A*, или об этом невозможно судить?

**18.** Случайная доходность ценной бумаги имеет нормальное распределение с ожидаемым значением $E(R) = 14\%$ и риском 15%. Облигации государственного займа дают безрисковую доходность 5%. Найти вероятность того, что вложение в эту бумагу будет выгоднее, чем покупка облигаций.

**19.** Какова «бета» для каждой акции со следующими данными об ожидаемой доходности (табл. 6.12)?

Таблица 6.12

| Акция | Ожидаемая доходность акции при рыночной доходности – 10% | Ожидаемая доходность акции при рыночной доходности + 10% |
|---|---|---|
| А | 0 | + 20 |
| Б | – 20 | + 20 |
| В | – 30 | 0 |
| Г | + 15 | +15 |
| Д | + 10 | – 10 |

## Аналитические задачи

**1.** Пусть $A$ – вклад в рискованный актив с вероятностью полной утраты $p_a$ и с доходностью $r_a$ при его сохранении. Требуется:

а) получить формулы математического ожидания и риска (СКО) случайной доходности $r$ подобного вложения;

б) определить, как изменятся формулы п. «а», если вместо риска актива будет иметь место риск процентов: вклад возвращается в полном объеме, а проценты теряются с вероятностью $p_n$ или начисляются по ставке $r_a$.

**2.** Сформировать портфель Тобина минимального риска из двух видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 2 и рисковых с ожидаемой эффективностью 10 и риском 5. Найти зависимость эффективности портфеля от его риска.

**3.** В модели САРМ известны эффективности $m_1$, $m_2$ и $\beta_1$, $\beta_2$ двух ценных бумаг. Как найти безрисковую ставку $r_0$ и эффективность рынка $m_c$?

**4.** Имеются два актива со случайными эффективностями $R_1$, $R_2$. Возможные значения этих эффективностей и их вероятности сведены в табл. 6.13).

Таблица 6.13

| Вероятность | 0,2 | 0,8 |
|---|---|---|
| $R_1$ | 5% | 1,25% |
| $R_2$ | −1% | 2,75% |

Инвестор руководствуется функцией полезности дохода

$$U(R) = 1{,}2\,R - 0{,}1\,R^2$$

и формирует составной актив исходя из критерия максимизации ожидаемой полезности. Определить оптимальные пропорции этого актива и его характеристики $m_p$, $\sigma_p$.

**5.** Хорошо диверсифицированный портфель акций, сформированный на капитале $K$, имеет коэффициент бета, равный величине $\beta_П$. Владелец портфеля намерен включить в него еще один вид акций с коэффициентом $\beta = \beta_А$ и готов инвестировать для этого сумму $I = \lambda K$, не превышающую 10% от первоначальной инвестиции $K$. Получить формулу относительного изменения в результате добавления акций $A$ портфельного риска (СКО) в зависимости от доли $\lambda$ и количественных характеристик $\beta_П$ и $\beta_А$.

**6.** Функция полезности инвестора в зависимости от изменения дохода характеризуется следующим свойством: полезность малого выигрыша $\Delta x$ пропорциональна этому выигрышу и обратно пропорциональна наличному капиталу $x$. Записать дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять эта функция и, решив его, найти ее вид.

**7.** Кредит $P$ выдан под ставку сложного процента $j$ на срок $n$. Чему равна величина дюрации $D$ потока погашающих платежей при ставке дисконтирования, равной кредитному проценту $j$, для схемы:

а) равных процентных выплат;

б) равных срочных уплат?

**8.** Получить формулу расчета показателя дюрации простой годовой ренты срока $n$ с выплатами $R$ в конце каждого года.

## Ситуационные задачи

**1.** Пусть известны вектор ожидаемой доходности и матрица ковариации трех активов (ценных бумаг):

$$MR = \begin{vmatrix} 10{,}1 \\ 7{,}8 \\ 5{,}0 \end{vmatrix} \qquad VC = \begin{vmatrix} 210 & 60 & 0 \\ 60 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Известно, что рискованный портфель гражданина Сидорова разбит пополам на два рискованных актива. Определить:

а) какая из трех ценных бумаг является безрисковым активом? Почему?

б) чему равна ожидаемая доходность и стандартное отклонение всего портфеля, если безрисковый актив составляет 25% всего портфеля?

**2.** Ваша эксцентричная тетя оставила вам в наследство акции компании Boeing на 50 000 долл. и 50 000 долл. наличными. К сожалению, она потребовала не продавать акции в течение одного года, а все деньги вложить в один из видов акций компаний, представленных в табл. 6.14. Какой портфель был бы наиболее надежным при выполнении этих условий?

Таблица 6.14

| Компания | Коэффициент корреляции компании | | | | | | | Стандартное отклонение, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Boeing | Citicorp | Kodak | Georgia Pacific | McDonnell Douglas | Polaroid | Thermo Electron | |
| Boeing | 1 | 0,65 | 0,45 | 0,34 | 0,64 | 0,4 | 0,42 | 28 |
| Citicorp | | 1 | 0,46 | 0,48 | 0,42 | 0,58 | 0,31 | 29 |
| Kodak | | | 1 | 0,50 | 0,50 | 0,41 | 0,23 | 25 |
| Georgia Pacific | | | | 1 | 0,50 | 0,42 | 0,40 | 29 |
| McDonnell Douglas | | | | | 1 | 0,21 | 0,37 | 24 |
| Polaroid | | | | | | 1 | 0,33 | 39 |
| Thermo Electron | | | | | | | 1 | 42 |

**3.** Андрею Кутукову нравится игра «Времена года», которую ежеквартально проводит казино «Шанс». Согласно его прикидкам, успех в игре имеет вероятность 0,08 и позволяет удесятерить вложенный капитал; при проигрыше деньги «теряются» (достаются казино). Объявление результатов игры и выплаты победителям производятся в конце каждого квартала перед началом очередного тура. Чтобы любимое развлечение не стало разорительным, он решил параллельно с игрой часть $x_д$ денег класть на трехмесячный депозит под безрисковую ставку $r_д = 10\%$ (в расчете на квартал).

Определить пропорцию вложений в игру и на депозит с учетом требования сохранить «в среднем» вложенный капитал.

**4.** Иванову надоело держать деньги в квартирных тайниках, и он решил вложиться в акции $A$, $B$ с характеристиками $m_A = 12\%$, $\sigma_A = 15\%$, $m_B = 28\%$, $\sigma_B = 30\%$ и коэффициентом корреляции $r_{AB} = 0{,}1$. Сторонник осторожных решений и умеренных действий, он готов довольствоваться ожидаемой доходностью $m_p = 14\%$, лишь бы надежность ее получения была как можно выше. Требуется:

а) записать (алгебраически) модель оптимальной по критерию риска диверсификации вложения при условии, что ради снижения риска Иванов предполагает часть денег хранить наличностью в том же, что и раньше, укромном месте;

б) используя Excel, найти оптимальные пропорции вложения и его риск;

в) определить, куда и сколько следует вложить, если накопленная Ивановым сумма равна 100 000 руб.

**5.** Менеджер отвечает за управление портфелем пенсионного фонда, в его распоряжении 990 млн руб., которые он должен поделить между рыночным портфелем и безрисковыми ценными бумагами. Аналитик, консультирующий менеджера, уверен, что в следующем году по безрисковым ценным бумагам можно получить доходность 0,08, а возможные ставки годовой доходности рыночного портфеля и их вероятности будут такими, как показано ниже:

| **Доходность** | **Вероятность** |
|---|---|
| 0,30 | 0,30 |
| 0,20 | 0,40 |
| 0,10 | 0,25 |
| –0,10 | 0,05 |

Какой должна быть доля каждой из компонент, чтобы ожидаемая доходность инвестиций пенсионного фонда составляла

15%? Чему будет равен риск такого портфеля (среднеквадратическое отклонение его доходности)?

**6.** Врач, вышедший на пенсию, предполагает покупать только долговые ценные бумаги и акции рыночного портфеля. Как инвестор он хочет быть уверенным в том, что даже если доходность рыночного портфеля окажется ниже нормального уровня $m_c = 14\%$ на величину, соответствующую двум среднеквадратическим отклонениям $\sigma_c = 12\%$, доходность его портфеля будет не менее 5%. При этом вероятностями худших исходов он пренебрегает. Определить:

а) какой портфель вы бы ему порекомендовали, если ставка безрискового процента по долговым бумагам составляет 8%;

б) вероятности неблагоприятных исходов, которыми пренебрегает инвестор (аппроксимируется распределение случайной доходности рынка нормальным законом).

**7.** «Зачем покупать товар, когда можно купить его производство», – решил владелец процветающей торговой компании господин Широков. Через год и в обозримой перспективе эта сделка даст ему 0,3 млн руб. ежегодно, но каков риск? Если оценить этот проект как безрисковый, а его риск окажется таким же, что и у рынка ценных бумаг, то много ли переплатит господин Широков, покупая эту фирму?

Решить задачу при условии, что безрисковая ставка $r_0 = 10\%$, а ожидаемая доходность рынка $m_c = 20\%$.

**8.** Получив наследство, Николай почти все деньги вложил в ценные бумаги. Его портфель составлен из инвестиции в рискованный портфель (дающий 12%-ную ожидаемую доходность и 25%-ные стандартное отклонение) и в безрисковый актив (дающий 7%-ную доходность). В целом портфель имеет стандартное отклонение 20%. Может ли Николай оценить ожидаемую доходность портфеля, и если да, то чему эта доходность равна?

## Тесты

**1.** Из двух акций $A$ и $B$ первая отрицательно коррелируется с другими акциями, доступными для инвестирования на рынке ценных бумаг. Расположить в порядке возрастания равновесные доходности этих акций $m_A$, $m_B$ и ставку безрискового процента $r_0$.

1) $r_0$, $m_A$, $m_B$;

2) $r_0$, $m_B$, $m_A$;

3) $m_A$, $r_0$, $m_B$;

4) все ответы неверны.

**2.** Фирма оценивает свои инвестиционные проекты по ставке сравнения, равной стоимости капитала (*WACC*). Что можно сказать о высокорисковых проектах? Будут они переоценены или недооценены при таком подходе:

1) переоценены;

2) недооценены;

3)исходной информации недостаточно.

**3.** Рассмотреть четыре акции со следующими ожидаемыми доходностями и стандартными отклонениями (табл. 6.15).

Таблица 6.15

| Акция | Ожидаемая доходность, % | Стандартное отклонение, % |
|---|---|---|
| A | 15 | 12 |
| B | 14 | 7 |
| C | 13 | 8 |
| D | 16 | 11 |

Есть ли среди этих акций те, от которых инвестор, избегающий риска, заведомо откажется:

1) таких акций нет;

2) A;

3) B;

4) C;

5) D.

**4.** Согласно правилу оценки долгосрочных активов (уравнение равновесного рынка), акциям с коэффициентом β свойственны те же рыночный риск и ожидаемая доходность, что и:

1) портфелю, состоящему из β инвестиций в казначейские векселя и (1 – β) инвестиций в рыночные ценные бумаги;

2) портфелю, состоящему из β инвестиций в рыночные ценные бумаги и (1 – β) инвестиций в казначейские векселя;

3) портфелю, состоящему наполовину из рыночных ценных бумаг и наполовину из казначейских векселей;

4) такого портфеля, кроме пакета этих акций, нет.

**5.** В какой из ситуаций можно достичь максимального сокращения риска вложений, если их возможности ограничиваются двумя акциями и операции коротких продаж не производятся?

1) доходности акций некоррелированы;

2) имеет место полная отрицательная корреляция;

3) корреляция положительна;

4) корреляция отрицательна;

5) имеет место полная положительная корреляция.

**6.** Ожидаемую доходность акции $m$ часто задают в виде линейной функции с коэффициентом бета ($\beta$) от ожидаемой доходности рынка ($r_m$):

$$m = \alpha + \beta r_m.$$

Согласно модели ценообразования на рынке капиталовложений (CAPM) равновесному состоянию этого рынка будет отвечать:

1) $\alpha = 0$;

2) $\alpha = r_0$ (ставка безрискового процента);

3) $\alpha = (1 - \beta)r_0$;

4) $\alpha = (1 - r_0)$;

5) ни один из приведенных выше вариантов не верен.

**7.** Портфель содержит акции 10 видов с равными по каждому виду вложениями капитала. Половина этих акций имеет коэффициент $\beta = 1{,}2$, а у остальных – $\beta = 1{,}4$. Чему равен этот показатель («бета» вклада) для всего портфеля?

1) 1,3;

2) больше, чем 1,3, потому что портфель не полностью диверсифицирован;

3) меньше, чем 1,3, потому что диверсификация уменьшает величину, «бета» вклада;

4) имеющейся информации недостаточно.

**8.** Представлены три ценовых состояния рынка (конъюнктуры) с двумя видами акций А и Б (табл. 6.16).

Таблица 6.16

| Акция | Конъюнктура | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| А | 8 | 11 | 9 |
| Б | 12 | 9 | 13 |

Наилучшей из всех является конъюнктура:

1) первая;

2) вторая;

3) третья;

4) имеющейся информации недостаточно.

**9.** Портфель инвестора содержит меньше различных акций, чем рыночный портфель. Риск этого портфеля будет ниже, чем риск рыночного портфеля, если:

1) портфель хорошо диверсифицирован;

2) «бета» портфеля меньше единицы;

3) портфель хорошо диверсифицирован и его $\beta > 1$;

4) портфель хорошо диверсифицирован и его $\beta < 1$;

5) ни один из приведенных выше вариантов ответов неверен.

**10.** Инвестиционный портфель предприятия представляет совокупность:

1) финансируемых предприятием инвестиционных проектов;

2) принятых к эксплуатации объектов завершенного строительства;

3) ценных бумаг в фондовом портфеле предприятия;

4) эмитированных предприятием акций;

5) эмитированных предприятием облигаций.

**11.** Компания решает, выпускать ли ей акции, чтобы привлечь деньги для финансирования инвестиционного проекта, риск которого равен рыночному, а ожидаемая доходность – 20%. Если безрисковая ставка равна 10% и ожидаемая доходность рыночных ценных бумаг (рыночного портфеля) – 15%, компании следует выпустить акции:

1) при «бета» акций компании не больше 2,0;

2) при «бета» акций компании не меньше 2,0;

3) при любом значении «бета».

**12.** Вы инвестировали 1 млн руб. в хорошо диверсифицированный портфель акций. В настоящее время вы получили еще 200 000 руб. (0,2 млн руб.) в наследство. Какое из следующих действий обеспечит вам наиболее надежный доход от вашего портфеля:

1) инвестирование 200 тыс. руб. в государственные облигации (их $\beta = 0$);

2) инвестирование 200 тыс. руб. в акции с $\beta = 1$;

3) инвестирование 200 тыс. руб. в акции с $\beta = -0{,}25$?

**13.** Пусть ставка дисконтирования $r$ составляет 100%. В какой последовательности, начиная с конца первого периода, следует расположить два платежа (4; 16), чтобы средний срок выплаты был наименьшим? Изменится ли ответ при нулевой денежной оценке времени, т.е. для значения $r = 0$? При какой расстановке платежей риск процентной ставки будет выше?

1) (16; 4);

2) (4; 16);

3) изменится;

4) не изменится;

5) (16; 4);

6) (4; 16)?

**14.** Портфель *A* имеет следующую структуру: облигации государственного займа – 12%, простые акции крупных нефтяных компаний – 15%, привилегированные акции банков, страховых компаний – 20%, депозитные сертификаты коммерческих банков – 15%, облигации крупных промышленных предприятий – 30%.

Портфель *B* содержит акции нефтедобывающих и нефтеперерабатывающих предприятий, акции предприятий, занимающихся транспортировкой и реализацией нефти и нефтепродуктов, а также производящих химическую продукцию на основе нефтепродуктов. Определить типы этих портфелей и сравнить их с точки зрения минимизации риска:

1) оба портфеля – консервативные, т.е. ориентированы в большей степени на надежность, нежели на доходность вложений;

2) портфель *B* сильно диверсифицирован и поэтому надежен;

3) портфель *B* агрессивный, т.е. ориентирован в большей степени на доходность, чем на надежность вложений;

4) риск портфеля *A* ниже, чем у портфеля *B*.

**15.** Для определения величины VAR торговой компании *A* на периоде, равном одному кварталу, ее аналитики использовали 95%-ный уровень значимости. В результате они получили оценку этого показателя, равную 19% от вложенного капитала. Цена заемного капитала для компании *A* – 32% годовых. Чему равно пороговое значение $k_{\min}$ коэффициента самофинансирования $k$, исключающее риск разорения.

Коэффициент самофинансирования определяется долей собственного капитала в полном капитале:

$$k = \frac{\text{Собственный капитал}}{\text{Собственный капитал} + \text{Заемный капитал}} = \frac{\text{СК}}{\text{СК} + \text{ЗК}}.$$

1) 25%;

2) 27,2%;

3) 19,8%;
4) 33,3%;
5) 16%.

**16.** Ваша эксцентричная тетя оставила вам в наследство 50 000 долл. наличными и акции компании Boeing на 50 000 долл. К сожалению, она потребовала не продавать акции в течение одного года, а все деньги вложить в один из рекомендуемых ею видов акций. Какой вид следует выбрать, чтобы получить наиболее надежный портфель при следующих данных (табл. 6.17)?

Таблица 6.17

| Вид акций | Boeing | Kodak | Georgia Pacific | McDonnell Douglas |
|---|---|---|---|---|
| Стандартное отклонение, % | 28 | 25 | 29 | 24 |
| Коэффициент корреляции с доходностью акций Boeing | 1 | 0,45 | 0,34 | 0,64 |

1) Kodak;
2) Georgia Pacific;
3) McDonnell Douglas;
4) все деньги следует вложить в акции компании Boeing;
5) для решения задачи необходимо знать матрицу парных корреляций.

**17.** В табл. 6.18 представлены данные об ожидаемых доходностях трех акций на конкурентном рынке ценных бумаг в состоянии его равновесия.

Таблица 6.18

| Акция | Ожидаемая доходность акции, при рыночной доходности – 10% | Ожидаемая доходность акции, при рыночной доходности + 10% |
|---|---|---|
| А | 0 | + 20 |
| Б | – 20 | + 20 |
| В | + 15 | + 19 |

Расположить эти акции в следующем порядке: акция имеет среднюю степень риска; менее рискованна, чем в среднем на рынке; более рискованна, чем в среднем на рынке.

1) Б; А; В;
2) В; А; Б;
3) исходных данных недостаточно;
4) А; В; Б.

## Ответы и решения

**Расчетные задачи**

**1.** 13,6%.

**2.** $0,1398 \approx 14\%$.

**3.** а) согласно (6.7) $2\Phi(\delta/\sigma) = 0,98$. Откуда $(\delta/15\%) \approx 2,34$ и, следовательно, $\delta = 15\% \cdot 2,34 = 35,1\%$. Таким образом, $-28,1\% < r < 42,1\%$; б) доверительный интервал для процентных денег получается умножением найденных граничных значений доходности на величину начального капитала: $-281000$ руб. $< \Delta <$ 421000 руб.; в) полагая год равным 252 торговым дням, найдем волатильность и ожидаемую доходность за один месяц:

$$\sigma = 15\% \cdot \sqrt{30/252} = 5,175\%,\ \mu = 7\% \cdot 30/252 = 0,833\%.$$

Откуда найдем верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала по доходности:

$$\mu - 2,34\sigma \approx -11,28\%,\ \mu + 2,34\sigma \approx 12,94\%.$$

Переходя к капиталу, получим предельные значения его возможных потерь и приобретений:

$-112800$ руб. $< \Delta <$ 129400 руб.;

г) максимально возможные потери начального капитала за год при доверительном уровне 99% оцениваются значением показателя VAR = 281000 руб.

**4.** а) средняя прибыль по каждому из вариантов: $m_A = 34,5$; $m_B = 33$. Следует выбрать вариант *А*; б) дисперсия прибыли по каждому варианту:

$$\sigma_A{}^2 = 32,25;\ \sigma_B{}^2 = 21.$$

Следует выбрать вариант *В*; в) коэффициент вариации (формула (6.4)) по каждому варианту:

$$\xi_A \approx 5,68/34,3 \approx 0,16;\ \xi_B \approx 4,58/33 \approx 0,14.$$

Следует выбрать вариант *В*.

**5.** Вариант «б».

**6.** $\sigma_A = 5\%$, $\sigma_B = 0{,}995\%$, $m_A = m_B = 15\%$. Не склонный к риску инвестор выберет акцию *B*.

**7.** а) $m_A = m_B = 2\%$; $\sigma_A = \sigma_B = 1{,}5\%$; б) $r_{AB} = -1$; в) минимизирующий риск разорения инвестор выберет акцию *B*; г) вкладываясь в каждую акцию половиной капитала, инвестор добьется безрисковой доходности $r = 2\%$.

**8.** а) 14%; б) 10%; в) 12,17%.

**9.** 2,35%.

**10.** Доли бумаг в портфеле составляют 52, 21 и соответственно 27%, его риск – 23,79%, а доходность равна заданной – 15%.

**11.** Решению соответствует табл. 6.19.

Таблица 6.19

| Доминируемые портфели | | | Эффективные (оптимальные по Парето) портфели | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_p$ | 8 | 7,56 | 7,54 | 7,94 | 8,70 | 9,74 | 10,99 | 12,37 | 13,85 | 15,67 | 18 |
| $m_p$ | 10 | 10,5 | 11 | 11,5 | 12 | 12,5 | 13 | 13,5 | 14 | 14,5 | 15 |
| $X_1$ | 0 | 0,0494 | 0,0888 | 0,1281 | 0,1675 | 0,2069 | 0,2462 | 0,2856 | 0,3250 | 0,1667 | 0 |
| $X_2$ | 1 | 0,8704 | 0,7467 | 0,6231 | 0,4995 | 0,3759 | 0,2523 | 0,1286 | 0,0050 | 0,000 | 0 |
| $X_3$ | 0 | 0,0802 | 0,1645 | 0,2487 | 0,3330 | 0,4173 | 0,5015 | 0,5858 | 0,6700 | 0,8333 | 1 |

**12.** Задачу можно решить в три приема:

1) найти касательный портфель: $x_{1c} = 0$, $x_{2c} = 0{,}5032$, $x_{3c} = 0{,}4968$; $m_c = 22{,}5162\%$, $\sigma_c = 4{,}1344\%$.

Примечание. Пропорции рисковых компонент в портфеле *C* удобно определить, рассчитав оптимальные доли какого-либо портфеля с $m_p > 25$ и без ограничения на знак переменной $x_0$ (решение аналогичной задачи средствами Excel показано на типовом примере 5 в разделе 6.3);

2) записать уравнение прямолинейной траектории эффективных портфелей (аналог линии рынка капитала) для задачи Тобина: $\sigma_p = 0{,}39m_p - 4{,}71$;

3) определить точку касания кривой безразличия, отвечающей функции полезности $U(R)$, и эффективной траектории, найденной п. «2». Решая задачу оптимизации $MU(R) = 3m - 0{,}1m^2 - 0{,}1\sigma^2 \to \max$ при условии, что $\sigma = 0{,}39m - 4{,}71$ ($m$ и $\sigma$ измеряются в процентах), получим характеристики оптимального портфеля:

$m^{\text{опт}} \approx 14{,}6\%$, $\sigma^{\text{опт}} \approx 1\%$.

Используя теорему о вложении в два фонда, найдем доли инвестирования $\alpha_0$ в безрисковый актив и $\alpha_c = 1 - \alpha_0$ в касательный портфель: $12\alpha_0 + 22{,}5\alpha_c = 14{,}6$. Откуда $\alpha_0 = 0{,}75$, $\alpha_c = 0{,}25$, т.е. четвертую часть капитала инвестору целесообразно вложить в касательный портфель $C$, а оставшиеся три части поместить на депозит под ставку 12%.

**13.** Согласно формуле (6.18) акции компании имеют ожидаемую доходность:

$$m = 10\% + 0{,}5(18\% - 10\%) = 14\%.$$

Таким образом, стоимость (цена) капитала компании:

$$i = 0{,}4 \cdot 10\% + 0{,}6 \cdot 14\% = 12{,}4\%.$$

**14.** а) 21,5%; б) 0,9; в)16,1%; г) 16,1%; д) 18,8%.

**15.** Рисковые бумаги входят в оптимальный портфель в соотношении 1:1. Если риск портфеля ограничен заданной величиной $\sigma^*$, то инвестиции в рисковые бумаги должны быть равными и в сумме составляют величину $u = \sigma^* / \sqrt{5}$; оставшуюся часть капитала $v = 1 - u$ следует вложить в безрисковые бумаги.

**16.** а) А, Г, Ж; б) $E$; в) 15%, портфель $B$; г) инвестирую 25/32 своих денег в портфель $E$ и дам в долг 7/32 денег под 12%. Ожидаемая доходность: $12 \cdot 7/32 + 18 \cdot 25/32 = 16{,}7\%$. Риск не изменится: стандартное отклонение: $(25/32) \cdot 32 = 25\%$. Выигрыш: $\Delta r = 16{,}7 - 15 = 1{,}7\%$.

**17.** а) $m_p = 17\%$; $\sigma_p \approx 18{,}08\%$; б) $r = 0$, $\sigma_p \approx 14{,}88\%$; $r = -0{,}5$, $\sigma_p \approx 10{,}76\%$; в) $m_p > m_A$, $\sigma_p < \sigma_A$. Портфель инвестора лучше портфеля, полностью состоящего из акций $A$.

**18.** $P = \text{Вер}(R > 5\%) = 0{,}5 \cdot \text{Вер}(|R - 14\%| \le 9\%) + 0{,}5 = \Phi(9/15) + 0{,}5 = \Phi(0{,}6) + 0{,}5$. Из таблицы значений функции Лапласа найдем, что $\Phi(0{,}6) = 0{,}22575$.Поэтому вероятность превышения безрисковой ставки $P \approx 0{,}7$.

**19.** А : 1, 0; Б : 2, 0; В : 1, 5; Г : 0; Д : – 1,0.

### Аналитические задачи

**1.** а) Запишем ряд распределения для случайных процентных выплат по данному активу.

| Проценты, П | $r_a A$ | $-A$ |
|---|---|---|
| Вероятности, $p$ | $1 - p_a$ | $p_a$ |

Здесь определяются два возможных значения $r_a$ и $-1$ случайной доходности и соответствующие им вероятности $1- p_a$, $p_a$. Отсюда найдем ее ожидаемое значение:

$$m_r = (1- p_a)\, r_a - p_a$$

и среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_r = \sqrt{p_a(1-p_a)}(1+r_a);$$

б) легко понять, что при этих условиях ряд распределения случайной доходности r задается следующим соответствием:

| | | |
|---|---|---|
| Значения доходности, $r$ | $r_a$ | 0 |
| Вероятности, $p$ | $1 - p_п$ | $P_п$ |

Математическое ожидание этой случайной величины:

$$m_r = (1 - p_п)\, r_a,$$

а ее СКО

$$\sigma_r = \sqrt{p_n(1-p_n)}r_a.$$

**2.** $x_0 = (10 - m_p)/8$, $x_1 = (m_p - 2)/8$, $m_p = 2 + 1{,}6\sigma_p$.

**3.** Для определения $r_0$ и $m_p$ следует воспользоваться системой уравнений:

$$m_1 = r_0 + \beta_1(m_c - r_0);$$
$$m_2 = r_0 + \beta_2(m_c - r_0).$$

**4.** Оптимальная «смесь» достигается при равных денежных вложениях в каждый из активов и позволяет получить не зависящую от случайного исхода ($\sigma_p = 0$) одну и ту же доходность $m_p = 2\%$.

**5.** Коэффициент «бета» расширенного портфеля составит величину

$$\beta_\Sigma = \frac{K}{K+I}\cdot\beta_П + \frac{I}{K+I}\cdot\beta_A.$$

Имея в виду, что $I = \lambda K \le 0{,}1K$, полученный после добавления акций $A$ портфель также можно считать сильно диверсифицированным (несистематический риск равен нулю). Согласно (6.19), риски базового и измененного портфелей определяются в зависимости от риска рыночного портфеля $\sigma_c$ следующими произведениями:

$$\sigma_\Pi = \beta_\Pi \cdot \sigma_\sigma,\ \sigma_\Sigma = \beta_\Sigma \cdot \sigma_c,$$

и, следовательно,

$$\frac{\sigma_\Sigma - \sigma_\Pi}{\sigma_\Pi} = \frac{\beta_\Sigma - \beta_\Pi}{\beta_\Pi}.$$

Отсюда видно, что при выполнении условия сильной диверсификации относительное изменение портфельного риска, измеряемого СКО, совпадает по величине с относительным изменением портфельной беты. С учетом доли дополнительного вложения $\lambda$ полученная формула приводится к виду

$$\frac{\Delta\sigma_\Pi}{\sigma_\Pi} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \cdot \frac{(\beta_A - \beta_\Pi)}{\beta_\Pi}.$$

**6.** Согласно условию

$$U(x+\Delta x) - U(x) = \frac{k \cdot \Delta x}{x},$$

где $k$ – величина коэффициента пропорциональности. Перепишем это равенство в виде отношения прироста этой функции к приросту ее аргумента:

$$\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = \frac{k}{x}.$$

Переходя к пределу отношения в левой части этого равенства при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dx} = \frac{k}{x},$$

которому удовлетворяет логарифмическая функция $U(x) = k\ln x$. При выборе надлежащих единиц числовой полезности можно считать, что $k = 1$ и рассматривать логарифмическую полезность

$$U(x) = \ln x.$$

**7.** а) $D = (1 + 1/j)(1 - (1 + j)^{-n})$; б) $D = (1 + 1/j) - n/((1 + j)^n - 1)$.

Примечание. Для решения можно использовать формулу современной величины ренты с постоянным абсолютным приростом платежей.

**8.** $D = (1 + 1/i) - n/((1 + i)^n - 1)$,

где $i$ – ставка дисконтирования.

## Ситуационные задачи

**1.** а) $V_{33} = 0$, поэтому третья бумага является безрисковой; б) $m_p \approx \approx 7{,}96 \approx 8\%$; $\sigma_p \approx 7{,}7\%$.

**2.** Половину стоимости портфеля составляют акции компании Boeing. Таким образом, задача состоит в выявлении такого вида акций $i$, для которого двухкомпонентный портфель будет иметь наименьший по всем возможным вариантам риск:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{4}\cdot 28^2 + \frac{1}{4}\cdot\sigma_i^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r_{1i}\cdot 28\cdot\sigma_i \xrightarrow[1\le i\le 7]{} \min,$$

что равносильно минимизации суммы

$$\Sigma = \sigma_i^2 + 56r_{1i}\sigma i.$$

Отсюда понятно, что для решения достаточно ограничиться следующими числовыми данными.

| $i$ | 1 | 2 | **3** | **4** | **5** | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_i$ | 28 | 29 | **25** | **29** | **24** | 39 | 42 |
| $r_{1i}$ | 1 | 0,65 | **0,45** | **0,34** | **0,64** | 0,4 | 0,42 |

Сравнивая значения по столбцам, легко понять, что выбор следует проводить между акциями Kodak (№3), Georgia Pacific (№4) и McDonnell Douglas (№5):

$$\min\{25(25 + 56\cdot 0{,}45);\ 29(29 + 56\cdot 0{,}34);\ 24(24 + 56\cdot 0{,}64)\} = \\ = \min\{1255;\ 1393{,}16;\ 1436{,}16\} = 1255.$$

Выбрать следует акции компании Kodak.

**3.** Ожидаемую доходность $m_и$ и риск игры $\sigma_и$ получим по правилам теории вероятностей исходя из ряда распределения случайной доходности вложения в игру:

| Доходности | 900% | −100% |
|---|---|---|
| Вероятности | 0,08 | 0,92 |

Откуда $m_и = -20\%$, $\sigma_и = 271{,}29\%$.

Требуемую пропорцию найдем из уравнения $m_и x_и + r_д(1 - x_и) = = 0$, т.е. $0{,}3x_и = 0{,}1$. Это означает, что играть следует на одной трети капитала, а его оставшуюся часть поместить на депозит. При этом риск комбинированного вложения, хотя и снизится втрое по сравнению с игрой, но все равно будет достаточно большим: $\sigma_p \approx 0{,}9 = 90\%$.

Таблица 6.20

| | Исход 1 | Исход 2 |
|---|---|---|
| Игра | $10\,x_и$ | 0 |
| Депозит | $1{,}1x_д$ | $1{,}1x_д$ |
| Вероятности | 0,08 | 0,92 |

Примечание. Ответ можно также получить, исходя из таблицы значений наращенной на конец квартала суммы (табл. 6.20).

При таком рассмотрении условие сохранения капитала примет вид: $0{,}08 \cdot 10x_и + 1{,}1x_д = 1$.

$x_A{}^2\sigma_A{}^2 + x_B{}^2\sigma_B{}^2 + 2x_Ax_B\sigma_A\sigma_Br_{AB} \to \min$.

**4.** а) $m_Ax_A + m_Bx_B = m_p$

$x_A + x_B \leq 1,\ x_A,\ x_B \geq 0$.

Отметим, что данная модель совпадает с математическим описанием задачи Тобина, в которой безрисковый актив («копилка») имеет нулевую доходность;

б) $x_A{}^{опт} = 0{,}4843$, $x_B{}^{опт} = 0{,}2924$. Оставшуюся часть $x_{нал}{}^{опт} = 0{,}2233$ следует хранить наличностью. Риск такого портфеля $\sigma_p = 11{,}94\%$;

в) в акции $A$ и $B$ следует вложить 48430 руб. и 29240 руб. соответственно, а остаток в сумме 22330 руб. оставить дома.

**5.** В соответствии с табличными данными определим ожидаемую доходность рыночного портфеля $m_c = 19\%$ и его риск $\sigma_c = 9{,}95\%$, или, округляя до процентов, $\sigma_c \approx 10\%$. Долю вложения $x$ в безрисковые ценные бумаги найдем из уравнения $8x + (1 - x)19 = 15$. Откуда $x_0 = 4/11$, и соответственно доля, приходящаяся на рыночный портфель, $x_1 = 1 - x_0 = 7/11$, т.е. 360 млн руб. – в безрисковые бумаги, а 630 млн руб. – в рыночный портфель. Сформированный таким образом портфель пенсионного фонда будет иметь риск $\sigma = x_1 \cdot \sigma_c = 6{,}33\%$.

**6.** а) обозначим долю вложения в облигации через $\alpha$, тогда $1 - \alpha$ – доля капитала, инвестируемая в рыночный портфель. В качестве рекомендуемого портфеля следует выбрать тот, который удовлетворяет требованию инвестора в расчете на наименее благоприятный исход и обеспечивает максимум ожидаемой доходности. Модель такого портфеля имеет вид

$$8\alpha + 14\,(1 - \alpha) \to \max;$$
$$8\,\alpha - 10\,(1 - \alpha) \geq 5.$$

Откуда $\alpha_{\text{опт}} = 15/18$, иначе говоря, на 15 стоимостных единиц безрисковых бумаг должны приходиться 3 стоимостные единицы акций рыночного портфеля; б) применяя формулу (6.8), найдем вероятность уклонения в пределах двух СКО:

$$P\,(|R_c - m_c| < 2\sigma) = 2\Phi(2).$$

Табличное значение функции Лапласа: $\Phi(2) = 0{,}47725$. Отсюда вытекает, что вероятность пренебрегаемых исходов

$$P(R_c < m_c - 2\,\sigma_c) = P(R_c < -10\%) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275.$$

**7.** При безрисковом вложении $\beta = 0$; для рыночного портфеля $\beta_c = 1$. Без учета риска ТС $= 0{,}3/0{,}1 = 3$; с поправкой на риск $\text{ТС}_{\text{скор}} = 0{,}3/(0{,}1 + 1 \cdot (0{,}2 - 0{,}1)) = 1{,}5$. Таким образом, переплата из-за пренебрежения риском составит величину $\Delta = 1{,}5$ млн руб., или 100%.

**8.** 11%.

### Тесты

**1.** (3). **2.** (1). **3.** (2), (4). **4.** (2). **5.** (2). **6.** (3). **7.** (1). **8.** (4). **9.** (4). **10.** (1), (3). **11.** (1). **12.** (3). **13.** (1), (4), (6). **14.** (3), (4). **15.** (1). **16.** (1). **17.** (4).

# Приложение

Учебный процесс не исчерпывается представленными в настоящем сборнике типами задач: вычислительными, на вывод формул, ситуационными и тестированием по набору ответов. Рассмотренный перечень можно расширить, добавив в него широкий диапазон разнохарактерных заданий – от контрольных вопросов до лабораторных работ. В данном приложении предлагаются контрольные вопросы двух типов в зависимости от предполагаемой формы ответа: 1П) устной развернутой; 2П) по принципу «верно/неверно». В третьей части (3П) дается краткая информация о программном продукте «eTest», предназначенном для подготовки и проведения тестов на компьютере.

## 1. Контрольные вопросы первого типа

1. Могут ли совпадать будущая и дисконтированная стоимость? Если да, то при каких условиях.

2. Как различаются скорости начисления и удержания по простым и сложным процентам?

3. В чем смысл эффективной годовой процентной ставки?

4. В чем суть принципа финансовой эквивалентности обязательств, применяемого для изменения условий контрактов?

5. Как используется принцип эквивалентности процентных ставок для сравнения финансовых операций?

6. Для какой схемы обслуживания кредита остаток долга на начало каждого единичного периода внутри срока погашения совпадает с величиной кредита?

7. Как меняется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

8. Насколько велика вероятность того, что применение различных критериев может привести к противоречивым результатам в оценке проектов? Как поступать, если критерии противоречат друг другу?

9. Почему ценные бумаги с более высокими доходностями в большей степени подвержены риску?

10. Почему кривые безразличия инвестора, избегающего риска в большей степени, имеют менее крутой наклон, чем кривые безразличия инвестора, избегающего риска в меньшей степени?

11. Приведите пример двух обыкновенных акций с относительно низкой и относительно высокой корреляцией.

12. В терминах модели Марковица объясните, как инвестор оптимизирует портфель ценных бумаг. В какой информации он нуждается для определения оптимального портфеля?

13. В терминах модели Тобина объясните, как скажется на ожидаемой доходности и риске портфеля дополнительная возможность безрискового вложения.

14. Как изменяется эффективная траектория при введении в модель Марковица возможности получения и предоставления безрисковых займов? Объясните устно и при помощи графиков.

15. Для обобщенной задачи Марковица (модель Тобина), учитывающей возможность получения и предоставления безрисковых займов, начертите эффективную траекторию, кривые безразличия и укажите оптимальный портфель для инвесторов, в большей и меньшей степени избегающих риска.

16. Обычно склонность к риску возрастает по мере роста доходов. Как будет меняться оптимальный портфель держателей акций, если имеется возможность получения и предоставления безрисковых займов. Будет ли меняться тип рискованных ценных бумаг, которые он держит? Объясните устно и графически.

17. Объясните разницу между техническим и фундаментальным анализом рынка ценных бумаг.

18. В чем разница между ожидаемой доходностью за период владения и доходностью к погашению?

19. Почему кривые безразличия инвестора не могут пересекаться?

20. Если ожидаемая доходность портфеля равна средневзвешенной ожидаемой доходности ценных бумаг, входящих в него, почему тогда общий риск портфеля не равняется средневзвешенной стандартных отклонений входящих в портфель ценных бумаг?

21. Когда стандартное отклонение портфеля равняется средневзвешенной сумме стандартных отклонений его компонентов?

22. Почему большинство инвесторов предпочитает иметь диверсифицированные портфели, вместо того чтобы вкладывать все свои средства в один финансовый актив?

23. Почему понятия корреляции и диверсификации тесно связаны между собой?

24. В терминах модели Марковица объясните на словах и с помощью графиков, как инвестор выбирает свой оптимальный портфель.

25. Почему ценные бумаги, чей $\beta$-коэффициент больше единицы, называются «агрессивными»?

26. Почему диверсификация приводит к уменьшению собственного, но не рыночного риска? Подтвердите интуитивное объяснение математическим обоснованием.

27. Сколько параметров нужно оценить, чтобы провести анализ характеристик по риску и доходности портфеля, состоящего из 50 видов акций, используя: а) модель Марковица; б) рыночную модель?

28. Ковариация безрискового и рискованного активов равна нулю. Обоснуйте и подтвердите математически.

29. Придется ли инвестору, владеющему рыночным портфелем, покупать и продавать входящие в него бумаги после каждого изменения соотношений их курсов. Почему?

30. Согласно модели САРМ стандартное отклонение ценной бумаги разделяется на рыночный и нерыночный риски. Объясните разницу между ними.

31. Каким образом инвесторы получают доход по бескупонным облигациям?

32. Нарисуйте график выигрышей и потерь для следующих опционных стратегий: а) покупка опциона «пут» с премией 2 ден. ед. и ценой исполнения 70 ден. ед.; б) продажа опциона «колл» с премией 3 ден. ед. и ценой исполнения 40 ден. ед.; в) покупка акции за 80 ден. ед. и покупка опциона «пут» на эту акцию. Уплачиваемая продавцу опциона премия равна 1 ден. ед., а цена его исполнения – 70 ден. ед.

Наряду с проверкой знаний предложенный выше перечень содержит также вопросы на применение этих знаний для обоснования ответа в устной, графической или математической форме. Из всех вопросов только 27-й содержит ответ, который сводится к следующему: по сравнению с подходом Марковица рыночная модель позволяет сократить число оцениваемых параметров с 1325 (а) до 152 (б).

## 2. Контрольные вопросы второго типа («верно/неверно»)

1. Если проводить платежи в два раза чаще, а годовую ставку удвоить, то текущая стоимость вечной ренты не изменится.

2. Инфляция выгодна кредиторам.

3. Владельцу облигации будет выгодно увеличение действующей процентной ставки в период до ее погашения.

4. Годовой темп дефляции превышает темп инфляции следующего года, при котором цена вернется к прежнему уровню.

5. Вкладчику выгоднее начисление процентов за дробное число лет по правилу сложной ставки, чем наращение вклада смешанным методом.

6. Для осторожного инвестора ценные бумаги с β-коэффициентом, бóльшим единицы, предпочтительнее бумаг, β которых меньше единицы.

7. С помощью диверсификации можно управлять величиной несистематического риска портфеля ценных бумаг.

8. Существуют портфели ценных бумаг (без коротких продаж) с доходностью выше максимальной доходности их компонентов.

9. Если первая срочная уплата по кредиту в потоке погашающих его платежей меньше начисленного на ту же дату процента, то образовавшаяся задолженность превысит величину основного долга.

10. Если текущая ставка дисконтирования выше купонного процента, то теоретически справедливая оценка курса этой облигации меньше 100%.

11. Если доходность облигации выше купонной ставки, курс облигации больше 100%.

12. Облигации с высоким купонным доходом при прочих равных продаются дешевле, чем облигации с низким купонным доходом.

13. Если цена облигации превышает номинал, то ее доходность больше купонной ставки.

14. Заемщик должен погасить кредит по сложной ставке в 14% годовых сроком на 4 года по схеме равных процентных выплат. Льготный кредит с прощением процентов для него выгоднее, чем освобождение от выплаты основного долга.

15. Долговой денежный поток имеет положительное значение показателя *NPV* при ставке сравнения, превышающей кредитный процент.

16. Современная величина переменной ренты с убывающими по геометрической прогрессии платежами может равняться величине первой выплаты.

17. Числовые значения показателей *NPV* и *IRR* двух проектов при ставке сравнения, расположенной правее точки Фишера, будут противоречивы.

18. Для простого процента, как и для сложного, наращенную сумму финансовой ренты можно вычислить по формуле начисления простого процента на современную величину этой ренты.

19. Простой (недисконтированный) срок окупаемости проекта тем короче, чем выше норма амортизационных отчислений.

20. Лицо *A* избегает риска, если предпочитает детерминированную величину случайной с тем же математическим ожиданием.

21. Товар приобретается с частичной оплатой цены (первый взнос) на условиях потребительского кредита и равномерного погашения для оставшейся части стоимости. Реальная доходность этой ссудной операции для кредитора, определяемая ставкой сложного процента, зависит от величины первого взноса.

22. Договор финансового лизинга можно описать как в виде кредитной схемы, так и в терминах инвестиционного проекта.

23. Компания выпускает акции, чтобы привлечь средства для инновационного проекта. Государство дает гарантию, что через $T$ лет, необходимых для реализации проекта, оно выкупит при желании акционеров эти акции по цене, равной средней цене размещения с учетом накопленных процентов на основе процентной ставки по государственным облигациям аналогичной длительности. Данный механизм допускает описание в терминах опциона «пут», надписателем которого является государство, а держателем – акционер.

24. Степень риска хорошо диверсифицированного портфеля с $\beta = 2{,}0$ в два раза выше степени риска рыночного портфеля.

25. Если бы акции имели полную положительную корреляцию, диверсификация не могла бы снизить риск.

26. Инвесторы предпочитают диверсифицированные компании, так как они подвержены меньшему риску.

27. Согласно правилу оценки долгосрочных активов ожидаемая доходность инвестиций с отрицательной $\beta$ меньше процентной ставки.

28. Ожидаемая доходность инвестиций с $\beta = 2{,}0$ в два раза выше ожидаемой рыночной доходности.

29. Если акции расположены ниже линии рынка ценных бумаг, то цена их занижена.

30. Платеж, скорректированный с учетом риска (детерминированный эквивалент), всегда меньше прогнозируемого рискового платежа.

31. Анализ чувствительности можно использовать для определения переменных, наиболее значимых для успеха проекта.

32. Фирма, доход которой равен альтернативным издержкам, получает экономическую ренту.

33. Большинство фирм применяет несколько критериев отбора инвестиционных проектов.

34. Исследования показали, что корреляция между последовательными изменениями цены акций почти всегда отрицательна.

35. На эффективных рынках значения ожидаемой доходности любых акций одинаковы.

36. Динамика фондового рынка дает полезную информацию для прогнозирования будущей эффективности национальной экономики.

37. Фирмы заключают фьючерсные сделки, чтобы защитить себя от неожиданных изменений процентных ставок, обменных курсов иностранных валют или цен на товары.

38. После падения цен на акции фирмы скорее будут выпускать акции, а не производить эмиссию облигаций.

39. Когда вы покупаете фьючерсный контракт, вы платите сегодня за будущие поставки.

40. Держатель финансового фьючерса не получает каких-либо дивидендов или процентов по лежащим в основе контракта ценным бумагам.

41. Соотношение долга и собственного капитала компании всегда меньше единицы.

42. Рентабельность собственного капитала всегда меньше рентабельности активов.

**Таблица ответов «верно/неверно»**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. В | 2. Н | 3. Н | 4. Н | 5. Н | 6. Н | 7. В |
| 8. Н | 9. В | 10. В | 11. Н | 12. Н | 13. Н | 14. Н |
| 15. В | 16. В | 17. Н | 18. Н | 19. В | 20. В | 21. Н |
| 22. В | 23. В | 24. В | 25. В | 26. Н | 27. В | 28. Н |
| 29. Н | 30. В | 31. В | 32. Н | 33. В | 34. Н | 35. Н |
| 36. В | 37. В | 38. Н | 39. Н | 40. В | 41. Н | 42. Н |

Подытоживая, упомянем еще один из возможных вариантов, когда финансовая задача должна быть решена с учетом дополнительных возможностей и ограничений, обусловленных экономическим содержанием рассматриваемой проблемной ситуации. При этом исходные данные, необходимые для применения методов финансовой математики, получают на основе экономико-математического моделирования расширенной постановки, охватывающей различные аспекты деятельности хозяйствующего субъекта, или принимающего решение экономического агента. Например, для задачи о пополнении оборотного капитала за счет кредита необходимо иметь динамическую модель предприятия с дефицитом оборотных средств; то же относится к обоснованию бюджетной поддержки на погашение доли купонных выплат предприятием – эмитентом облигаций и т.д. Подобные задания перекрывают возможности традиционных учебных задач и их целесообразно выдавать в форме лабораторных работ с использованием персональных компьютеров. В описании должна содержаться экономико-математическая модель, позволяющая получить необходимую для решения финансовой задачи информацию.

## 3. Проведение тестирования с помощью программного продукта "eTest"

Решение тестов и контрольных вопросов "верно/веверно" можно автоматизировать, если использовать программы компьютерного тестирования. Одним из таких программных продуктов является программный комплекс "eTest", предназначенный для подготовки и проведения тестов на компьютере. Он состоит из двух частей: редактора тестов и программы для проведения тестирования.

В редакторе можно создавать иерархическую структуру для хранения вопросов теста, добавлять комментарии к конкретным вопросам и группам вопросов, импортировать и экспортировать данные для использования их в других оболочках. При построении теста преподаватель может создавать вопросы различного типа (простой выбор, множественный выбор, ранжирование, проверка пар сочетаний и свободный ввод ответа). Скомпонованные тесты можно использовать как для проведения тестирования, так и для самостоятельного использования студентами в процессе обучения, в этом случае при неправильном ответе на вопрос появляется окно с развернутым правильным ответом или со ссылкой на соответствующий раздел теории. При формировании теста преподаватель задает последовательность тем и определяет, какое количество вопросов из каждой темы должно быть включено в итоговый тест. Для защиты от списывания вопросы выбираются из базы случайным образом, после чего еще раз перемешиваются. Это позволяет избежать ситуации, когда на соседних компьютерах тестируемые отвечают на один и тот же вопрос.

По окончании тестирования его результаты выводятся на экране компьютера и могут быть либо распечатаны на принтере в виде ведомости, либо отправлены на сервер для дальнейшей обработки. Для выставления оценки допустимо использовать показатель процента правильных ответов не только по всему тесту целиком, но и по каждой теме теста, что позволяет более качественно оценить уровень подготовки студентов. При работе с сетевой версией преподавателю предоставляется возможность следить за процессом выполнения теста в режиме реального времени, сравнивать результаты тестирования по темам и отслеживать динамику освоения курса во времени.

Данный программный комплекс располагается на сайте www.etest.ru. и распространяется бесплатно.

# Библиографический список


1. *Бирман Г.* Экономический анализ инвестиционных проектов / Г. Бирман, С. Шмидт. – М.: ЮНИТИ, 1997.

2. *Бочаров П.П.* Финансовая математика: учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – М.: Гардарика, 2002.

3. *Брейли Р.* Принципы корпоративных финансов / Р. Брейли, С. Майерс. – М.: Олимп-бизнес, 1997.

4. *Бухвалов А.В.* Финансовые вычисления для профессионалов / А.В. Бухвалов, В.В. Бухвалова, А.В. Идельсон. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.

5. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1999.

6. *Ендовицкий Д.А.* Практикум по инвестиционному анализу / Д.А. Ендовицкий, Л.С. Коробейников, Е.Ф. Сысоева. – М.: Финансы и статистика, 2003.

7. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения. – М.: Приор, 2000.

8. *Капитоненко В.В.* Инвестиции и хеджирование. – М.: Приор, 2001.

9. *Ковалев В.В.* Сборник задач по финансовому анализу. – М.: Финансы и статистика, 2003.

10. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. – М.: Дело, 1998.

11. *Малыхин В.И.* Финансовая математика: учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1999.

12. *Мелкумов Я.С.* Финансовые вычисления. Теория и практика. – М.: ИНФРА-М, 2002.

13. *Первозванский А.А.* Финансовый рынок: расчет и риск / А.А. Первозванский, Т.Н. Первозванская. – М.: ИНФРА-М, 1994.

14. *Уланов В.А.* Сборник задач по курсу финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2003.

15. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1995.

16. *Шарп У.* Инвестиции / У. Шарп, Г. Александр, Дж. Бейли. – М.: ИНФРА-М, 1998.

Учебное издание

**Капитоненко Валерий Владимирович**

**ЗАДАЧИ И ТЕСТЫ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Заведующая редакцией *Л.А. Табакова*
Редактор *М.Ю. Волкова*
Младший редактор *Н.А. Федорова*
Художественный редактор *Ю.И. Артюхов*
Технический редактор *Т.С. Маринина*
Корректоры *Н.Б. Вторушина, Г.Д. Кузнецова*
Компьютерная верстка *И.В. Зык*
Оформление художника *Н.М. Биксентеева*

ИБ № 5079

Подписано в печать 19.12.2006. Формат 60 × 88/16
Печать офсетная. Гарнитура «Таймс»
Усл. п. л. 15,68. Уч.-изд. л. 14,25
Тираж 3000 экз. Заказ 2088. «С» 020

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7
Телефон (495) 625-35-02, факс (495) 625-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru

ООО «Великолукская городская типография»
182100, Псковская область, г. Великие Луки,
ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95
E-mail: zakaz@veltip.ru