Потоки платежей

1. Увеличение суммы первоначального долга в L раз

Чтобы определить срок увеличениясуммы первоначального долга в L раз, вернемся к таблице методов наращения и приравняем каждый множитель наращения F_n величине L, т.е. решим относительно n уравнение

$$F_n = L.$$

В таком случае получаем число лет, необходимое для увеличениясуммы первоначального долга в L раз для каждого метода наращения.

Метод наращения	Множитель наращения F_n	Срок увеличения долга в L раз
По простой процентной ставке i	$1+in$	$\frac{L-1}{i}$
По сложной процентной ставке i	$(1+i)^n$	$\frac{\ln L}{\ln(1+i)}$
По номинальной процентной ставке $i^{(m)}$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}$	$\frac{\ln L}{m\ln(1+i^{(m)}/m)}$
По непрерывной процентной ставке δ	$e^{\delta n}$	$\frac{\ln L}{\delta}$
По номинальной учетной ставке $d^{(m)}$	$\frac{1}{(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{mn}}$	$\frac{\ln L}{m\ln(1-d^{(m)}/m)}$
По сложной учетной ставке d	$\frac{1}{(1-d)^n}$	$\frac{\ln L}{\ln(1-d)}$
По простой учетной ставке d	$\frac{1}{1-nd}$	$\frac{L-1}{Ld}$

2. Таблицы множителей наращения и дисконтирования

Для облегчения финансовых расчетов, особенно со сложными процентами, ранее, когда не было электронных калькуляторов, были составлены таблицы мультиплицирующих множителей, или множителей наращения F(n,i). Мультиплицирующий множитель показывает, во сколько раз возрастет за n лет сумма, положенная в банк под i процентов годовых:

$$F(n,i) = (1+i)^n$$

Величина F(n,i) есть будущая стоимость одной денежной единицы — через n лет при ставке процента n.

Таблица множителей наращения

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368
4	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518
5	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685
6	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870
7	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076
8	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305
9	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558
10	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839

Дисконтирующий множитель показывает долю, которую составит начальная сумма, положенная в банк под i процентов годовых, от наращенной к концу n-го года суммы:

$$\nu(n,i) = 1/F(n,i) = (1+i)^{-n}$$

Величину $\nu(n, i)$ называют еще приведенной, или современной, стоимостью одной денежной единицы через n лет при ставке процента i.

Таблица множителей дисконтирования

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751	0,731
4	0,888	0,855	0,823	0,772	0,763	0,735	0,708	0,683	0,659
5	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621	0,593
6	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564	0,535
7	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513	0,482
8	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467	0,434
9	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424	0,391
10	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,442	0,386	0,352

3. Эквивалентность денежных сумм и платежей

Рассмотрим моменты времени t_1 и t_2, где t_2 не обязательно больше чем t_1. Пусть сумма С подлежит выплате в момент времени t_2. Стоимость (или ценность) этой суммы в момент t_1 определяется как:

1) результат дисконтирования суммы С к моменту t_1 в течение времени $(t_2 - t_1)$, если $t_2 > t_1$;

2) результат наращения суммы С к моменту t_1 в течение времени $(t_1 - t_2)$, если $t_1 > t_2$.

Для наращения и дисконтирования применяется принятая процентная ставка. Операции наращения и дисконтирования, которые при этом используются, называют приведением денежной суммы к данному моменту времени. Таким образом, стоимость (ценность) платежа в момент t — это его приведенная величина к моменту t.

Отсюда определяется эквивалентность денежных сумм во времени.

Определение. Денежные суммы в момент t_1 и в момент t_2 называются эквивалентными по принятой процентной ставке, если одна из них является результатом наращения или дисконтирования другой по данной процентной ставке в течение времени $|t_2 - t_1|$.

Обычно участники сделки исходят из того, что имеет место транзитивное свойство эквивалентности денежных сумм во времени: если сумма $C(t_1)$ в момент t_1 эквивалентна по заданной процентной ставке сумме $C(t_2)$ в момент t_2, а сумма $C(t_2)$ эквивалентна сумме $C(t_3)$ в момент t_3 по той же процентной ставке, то сумма $C(t_1)$, в момент t_1 эквивалентна по данной процентной ставке сумме $C(t_3)$, в момент t_3 .

Свойством транзитивности обладают денежные суммы, эквивалентные по сложной процентной ставке. Для денежных сумм, эквивалентных по простой процентной ставке, этого утверждать нельзя, поэтому понятие эквивалентности сумм для этих ставок применяется реже.

Можно показать, что если суммы эквивалентны по сложной процентной ставке, то равны их приведенные стоимости к любому моменту времени, в частности равны их современные стоимости. Действительно, если, например,

$$C_{t_2} = C_{t_1}(1+i)^{t_2-t_1}\text{, то } \frac{C_{t_1}}{(1+i)^{t_1}} = \frac{C_{t_2}}{(1+i)^{t_2}} \text{ и } C_{t_1}(1+i)^{t-t_1} = C_{t_2}(1+i)^{t-t_2} \text{ для любого } t.$$

Таким образом, чтобы установить эквивалентность сумм $C(t_1)$ в момент t_1 и $C(t_2)$ в момент t_2 по заданной процентной ставке, достаточно эти суммы привести к одному моменту времени или проверить для них определение эквивалентности денежных сумм. Если суммы не эквивалентны, более предпочтительной из них является та, современная стоимость которой больше.

Пример. По первому обязательству сумма погашаемого долга 500 руб. через 4 месяца. По второму — 550 руб. через 10 месяцев. Можно ли считать обязательства эквивалентными, если используется сложная годовая процентная ставка 8%? Если нет, то какое из них является более выгодным?

Результат наращения суммы 500 руб. в течение 6 месяцев по ставке 0,08 составляет $500 \cdot 1{,}08^{0,5} = 519{,}62 \neq 550$. Следовательно, обязательства не эквивалентны. Чтобы выяснить, какое из них является более выгодным, найдем современные стоимости этих обязательств:

$$\frac{500}{1{,}08^{\frac{1}{3}}} = 487{,}34 \text{ и } \frac{550}{1{,}08^{\frac{5}{6}}} = 515{,}83.$$

Значит, второе обязательство является более выгодным.

4. Эквивалентность серий платежей

Определение. Серия платежей $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ в моменты t_1, t_2,…, t_n, эквивалентна по принятой процентной ставке серии платежей $b_{\tau_1}, b_{\tau_2}, ..., b_{\tau_m}$ в моменты τ_1, τ_2,…, τ_m, если сумма платежей одной серии, приведенных по принятой процентной ставке к одному моменту времени, равна сумме платежей другой серии, приведенных к тому же моменту времени по той же процентной ставке.

Равенство, составленное в соответствии с данным определением, называется **уравнением эквивалентности**.

Для приведения платежей может быть выбран *любой момент времени*. Однако более естественным является выбор настоящего момента времени, когда сведения о процентных ставках на различные сроки являются наиболее достоверными, а денежные суммы реальными. Если серии платежей, указанные в определении, эквивалентны по сложной процентной ставке i, а для приведения выбран настоящий момент времени t = 0, то уравнение эквивалентности имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{t_i}}{(1+i)^{t_k}}=\sum_{j=1}^{m}\frac{b_{\tau_j}}{(1+i)^{\tau_j}}\ .$$

Если *одна серия платежей — расходы, а другая — доходы*, то уравнение эквивалентности выражает то, что при данной процентной ставке серия расходов в момент t = 0 имеет ту же ценность, что и серия доходов.

Если *обе серии платежей — выплаты* денежных сумм, например в счет погашения одного и того же долга, и серии эквивалентны, то одна серия платежей может заменить другую. В этом случае говорят о *безубыточном изменении условий контракта*. Определение эквивалентности серий платежей, так же как и уравнение эквивалентности, выражает принцип финансовой эквивалентности, в соответствии с которым производится замена одного (старого) финансового обязательства $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ на другое (новое) $b_{\tau_1}, b_{\tau_2}, ..., b_{\tau_m}$ Если серии эквивалентны по принятой участниками сделки процентной ставке, то обязательства финансово эквивалентны и одно обязательство можно заменить другим без ущерба для сторон.

Один из распространенных случаев изменений контракта — *консолидация (объединение) платежей*. Платежи $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ в моменты t_1, t_2,…, t_n, заменяются одним платежом b_{t_0} в момент t_0. При заданной процентной ставке возможна одна из двух задач:

1) Задан момент t_0. Требуется найти сумму консолидированного платежа b_{t_0}.

Для решения задачи составляется уравнение эквивалентности относительно момента t_0.

2) Задана сумма b_{t_0}. Требуется найти срок консолидированного платежа t_0.

Уравнение эквивалентности составляется относительно момента t = 0 и выражает равенство современных стоимостей старого и нового обязательств.

Пример. Существующее обязательство о выплате через 5 лет первоначального долга 90000 руб. с начисленными на него сложными процентами по годовой ставке 0,08 пересмотрено. По новому обязательству первая выплата размером в 30000 руб. будет произведена через 2 года, а оставшаяся сумма будет выплачена через 4 года после этой даты. Предполагая, что вычисления делаются на основе исходной процентной ставки, найти величину второго платежа в новом обязательстве.

Обозначим через X сумму второго платежа в пересмотренном обязательстве. Если 90000 руб. рассматривать как серию расходов кредитора, а 30000 руб. и X руб. — серию доходов, то уравнение эквивалентности, составленное относительно момента выдачи долга t = 0, имеет вид

$$90000=\frac{30000}{1{,}08^2}+\frac{X}{1{,}08^6}\ .$$

Отсюда X = 102004,02 руб. Таким образом, сумма 90000 рублей, предоставленная в долг в момент t = 0 при заданной процентной ставке, эквивалентна серии из двух погасительных платежей: 30000 руб. через 2 года и 102004,02 руб. через 6 лет.

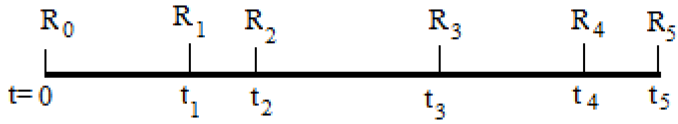
Этот же результат будет получен, если для составления уравнения эквивалентности использовать принцип финансовой эквивалентности обязательств по погашению долга. По старому обязательству сумма погашаемого долга равна $90000 \cdot 1{,}08^5$ руб. через 5 лет. Составим уравнение эквивалентности, приведя все суммы по старому и новому обязательствам на момент поступления искомого платежа t = 6:

$$(90000\cdot 1{,}08^5)\cdot 1{,}08 = 30000\cdot 1{,}08^4 + X.$$

Тогда X= 102004,02 руб.

5. Потоки платежей

Определение. *Поток платежей* (или *серия платежей*, или *финансовый поток*, или *денежный поток*) — это распределенная во времени последовательность платежей, т.е. последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены. Сумма отдельного платежа называется членом потока. Платеж со знаком "+" означает поступление денег, платеж со знаком " — " — расход денег.



Пусть P = {R_k, t_k} — поток платежей, в нем R_k — платежи, t_k — моменты времени. Кроме того, предполагается, что известна ставка процента i, обычно это сложная процентная ставка, неизменная в течение всего потока. Члены потока P — платежи R_1, R_2, …, R_n, поступающие соответственно в моменты t_1, t_2, …, t_n, где $0 < t_1 < t_2 <...< t_n < T$. Момент времени t= 0, от которого отсчитаны сроки поступления платежей, называют началом потока, Т— срок действия потока.

Поток платежей называется *конечным*, если число платежей в нем конечно, и *бесконечным*, если срок действия потока неограничен. Потоки платежей могут быть как *регулярными*, так и *нерегулярными*. Члены регулярного потока поступают через одинаковые промежутки времени, имеют одно и то же назначение (одинаковый знак) и изменяются во времени в соответствии с некоторым временным законом. Члены нерегулярного потока могут быть как положительными, так и отрицательными, временные интервалы между членами потока неодинаковы, а размеры платежей не подчиняются какому-либо временному закону.

Финансовый поток иногда задают в виде: (R_1, R_2, …, R_n; $t = t_1, t_2, …, t_n$), где $R_k>0$, k= 1, 2,..., n.

Определение. *Величиной потока* (или *стоимостью потока*) *в момент* t, $0 < t < T$, называется сумма платежей потока, приведенных (с помощью дисконтирования или наращения) к этому моменту.

Достаточно найти величину потока в какой-то момент, например, t = T:

$$\boldsymbol{P}(T)=\sum_k R_k(1+i)^{T-t_k}$$

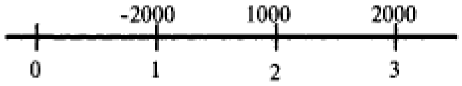
тогда в любой другой момент t величина потока

$$P(t) = P(T)(1+i)^{t-T}.$$

Величина A = P(0) называется *современной величиной* (*стоимостью*) потока; если поток конечный, то величина S = P(T) потока в момент T называется *конечной величиной* (*наращенной суммой*) потока.

Пример. Пусть поток есть P ={(-2000,1); (1000,2); (2000,3)}.

Найдем характеристики этого потока при ставке процента i = 10%.



Сначала найдем современную величину потока:

$$\boldsymbol{P}(0) = -2000\cdot(1+0{,}1)^{-1} + 1000\cdot(1+0{,}1)^{-2} + 2000\cdot(1+0{,}1)^{-3} = $$
$$= -1818{,}2 + 826{,}4 + 1502{,}6 = 510{,}8.$$

Теперь можно найти и конечную величину потока:

$$\boldsymbol{P}(3) = \boldsymbol{P}(0)\,(1+i)^3 = 679{,}8.$$

Если процентная ставка переменна или способ начисления производится не по обычной, т.е. не по сложной процентной ставке, а в общем случае, вместо множителя наращения $(1+i)^t$ и соответствующего множителя дисконтирования $(1+i)^{-t}$ следует использовать множитель наращения F(s,t) и множитель дисконтирования v(s,t) , действующие на временном отрезке [s,t], где s < t, причем наращение производится от момента s к моменту t, а дисконтирование – наоборот, от момента t к моменту s. Тогда современная стоимость потока платежей равна

$$A = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k)\,,$$

а наращенная сумма потока платежей равна

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k F(t_k, T)$$

Стоимость потока в произвольный момент t равна

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} R_k F(t_k, t) + \sum_{k=m+1}^{n} R_k v(t, t_k)$$

где m выбрано так, чтобы $t_m < t < t_{m+1}$. Очевидно,

$$P(t) = A\ F(t) = S\ v(t,T).$$

Отсюда, в частности, можно получить связь между наращенной суммой S и современной стоимостью A потока платежей:

$$S = A\ F(T) \quad \text{или} \quad A = S\ v(T).$$

Таким образом, имеется эквивалентность — чтобы получить сумму S через время T можно поступить двумя способами:

1) разместить сумму A на время T под заданную процентную ставку на банковский счет или
2) вносить платежи $R_1, R_2, \ldots, R_n$ в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, для начисления на них процентов по этой же процентной ставке до окончания срока T.

Пример. Предприниматель должен выплатить денежные суммы:

1000 руб. 1 января 2001 года,
5000 руб. 1 июля 2003 года и
10000 руб. 1 января 2005 года.

Кредит выдан под 20% годовых, начисляемых сложными процентами 1 раз в год. Найти стоимость этих платежей на 1 января 2000 года и на 1 июня 2002 года.

Пусть время измеряется в годах начиная с 1 января 2000 года. Ставка дисконтирования i = 0,2. Стоимость долгов в начальный момент равна:

$$A = \frac{1000}{1+i} + \frac{5000}{(1+i)^{3,5}} + \frac{10000}{(1+i)^5} = 7493{,}52.$$

Стоимость на 1 июня 2002 года этих же долгов равна:

$$P\left(\frac{29}{12}\right) = A(1+i)^{\frac{29}{12}} = 11642{,}34.$$

6. Доходность финансового потока

Определение. *Доходность* финансового потока ($R_1, R_2, \ldots, R_n$; $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$) за единицу времени — это ставка сложных процентов r, при которой современная стоимость потока равна P:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} \quad .$$

Это - *уравнение доходности* финансового потока. Если сроки поступления платежей измеряются в годах, то r – годовая доходность. Доходность потока платежей - это не процентная ставка потока; она только внешне совпадает с ней.

Уравнение доходности не всегда имеет решение, а если имеет, то не обязательно единственное. Но в некоторых классах случаев имеется единственное положительное решение. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть P — стоимость финансового потока ($R_1, R_2, \ldots, R_n$; $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$) в момент t = 0. Если все члены потока положительны и выполняется условие

$$P < \sum_{k=1}^{n} R_k ,$$

то уравнение доходности имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Достаточно показать, что уравнение F(r) = 0, где

$$F(r) = P - \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}$$

имеет, и притом единственное, решение. Функция F(r) непрерывна и дифференцируема на множестве $[0,+\infty)$. Так как ее первая производная положительна, а вторая отрицательна, то F(r) является возрастающей вогнутой функцией на множестве $[0, +\infty)$. Кроме того,

$$F(0) = P - \sum_{k=1}^{n} R_k < 0 \text{ и } \lim_{r\to\infty} F(r) = P > 0.$$

Отсюда следует, что существует единственная точка r* в промежутке $[0, +\infty)$ такая, что $F(r^*) = 0$. Теорема доказана.

Для нахождения корня уравнения F(r) = 0 применяют приближенные методы. Можно также пользоваться копмьютерными пакетами, например в Excel может быть использован пакет «Поиск решения».

Пример Отдача от 400000 руб., инвестированных в проект, составляет в первый год 30000 руб., затем через полгода — 70000 руб., еще через год 150000 руб., затем через 1,5 года — 200000 руб. Определить доходность инвестиции.

Условие $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$, для данного проекта выполнено, проект не является заведомо убыточным, т.к.

$$400000 < 30000 + 70000 + 150000 + 200000 = 450000.$$

Пусть 1 год - единица измерения времени. Функция F(r) имеет вид:

$$F(r) = 400000 - \frac{30000}{1+r} - \frac{70000}{(1+r)^{1,5}} - \frac{150000}{(1+r)^{2,5}} - \frac{200000}{(1+r)^{4}}.$$

Согласно теореме существует единственный положительный корень уравнения F(r) = 0. Так как

$$F(0,04) = -1797,908 < 0,\ F(0,05) = 9052,552 > 0,$$

то доходность заключена между 4% и 5% годовых. С точностью до четвертого знака после запятой доходность составляет 4,1629% годовых.

7. Непрерывные потоки платежей

Определения основных характеристик потока платежей справедливы не только для дискретных, но и для непрерывных потоков платежей. Понятие непрерывно выплачиваемого потока платежей хотя и является теоретическим, во многих случаях позволяет упростить расчеты (например, в анализе инвестиций). Предположим, что в течение времени [0, T] непрерывно выплачиваются деньги с интенсивностью выплат f(t) в единицу времени в момент t. Тогда современная стоимость и наращенная сумма такого потока платежей определяются по формулам:

$$A = \int_0^T f(t)v(t)dt \qquad \text{и} \qquad S = \int_0^T f(t)F(t,T)dt$$

Пример. На непрерывно и равномерно поступающие в течение 20 лет платежи с постоянной интенсивностью 100 руб. в год непрерывно начисляются проценты по силе роста, изменяющейся по закону

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}03,\ 0 \le t < 5 \\ 0{,}05,\ 5 \le t < 12 \\ 0{,}07,\ t \ge 12 \end{cases}.$$

Найти современную стоимость такого финансового потока.

Найдем дисконтный множитель v(t). Имеем

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(y)dy}.$$

Тогда

$$v(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t 0{,}03dy\right),\ 0 \le t < 5 \\ \exp\left(-\int_0^5 0{,}03dy - \int_5^t 0{,}05dy\right),\ 5 \le t < 12 \\ \exp\left(-\int_0^5 0{,}03dy - \int_5^{12} 0{,}05dy - \int_{12}^t 0{,}07dy\right),\ t \ge 12. \end{cases}$$

Отсюда:

$$v(t) = \begin{cases} \exp(-0{,}03t),\ 0 \le t < 5 \\ \exp(0{,}1 - 0{,}05t),\ 5 \le t < 12 \\ \exp(0{,}34 - 0{,}07t),\ t \ge 12 \end{cases}.$$

Таким образом, современная стоимость рассматриваемого потока платежей равна

$$A = 100\int_0^{20} v(t)dt = 100\left[\int_0^5 \exp(-0{,}03t)dt + \int_5^{12} \exp(0{,}1 - 0{,}05t)dt + \int_{12}^{20} \exp(0{,}34 - 0{,}07t)dt\right] =$$

$$= 100\left[\frac{1}{0{,}03}(1 - \exp(-0{,}15)) + \frac{\exp 0{,}1}{0{,}05}(\exp(-0{,}25) - \exp(-0{,}6)) + \frac{\exp 0{,}34}{0{,}07}(\exp(-0{,}84) - \exp(-1{,}4))\right] = 1344{,}197.$$

8. Чистый денежный поток

До сих пор предполагалось, что все платежи, дискретные или непрерывные, положительны. Если имеется серия доходов $a_0, a_l, a_2,..., a_n$ в моменты $t = 0, t_1, t_2, …, t_n$, и серия расходов $b_0, b_l, b_2,..., b_n$ в те же моменты времени, то член потока R_k можно представить в виде разности

$$R_k = a_k — b_k,\ k = 0,1,2,..., n,$$

так как положительный платеж соответствует поступлению денег, отрицательный — их расходу (в большинстве случаев только одна из сумм a_k и b_k будет не нулевой). Тогда $R_0, R_1, R_2, …, R_n$ — это *чистый денежный поток*. Этот поток охватывает два встречных потока — расходов и доходов.

Применительно к непрерывным потокам платежей, если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — интенсивности расходов и получения денег в момент t соответственно, то чистую интенсивность $f(t)$ такого потока в момент t можно представить в виде разности

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

Иногда рассматривают комбинированный непрерывно-дискретный поток, характеризующийся набором следующих величин:

$$(R_0, R_1, R_2,..., R_n; t = 0, t_1, t_2,..., t_n; f(t), t \in [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, T]).$$

Доходность за единицу времени денежного потока, содержащего расходы и доходы, определяется как ставка сложных процентов r, по которой современная стоимость потока расходов равна современной стоимости потока доходов (или, что равносильно, современная стоимость чистого денежного потока равна 0). Доходность денежного потока определяется из уравнений доходности, приведенных для различных видов потоков в следующей таблице.

Вид денежного потока	*Уравнение доходности*
чистый денежный поток общего вида	$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+r)^{t_k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^{t_k}}$.
дискретный	$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} = 0$.
непрерывный	$\int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t} dt = 0$
непрерывно-дискретный	$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t} dt = 0$

<u>Теорема</u>. Если все отрицательные платежи предшествуют всем положительным (или наоборот) и выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{n} R_k > 0 \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)dt > 0 \right)$$

для дискретного (непрерывного) потока платежей, то уравнение доходности имеет единственное положительное решение.

<u>Пример</u>. В обмен на инвестиции в начале 2000, 2001 и 2002 годов в размере 1000 руб., 2000 руб. и 3000 руб. соответственно инвестор ожидает получить доход в виде единичного платежа в размере 1500 руб. в начале 2004 года и потока непрерывно и равномерно поступающих платежей с интенсивностью 1000 руб. в год в течение 10 лет начиная с 2006 года. Найти доходность инвестиций.

Сроки поступления платежей измеряются в годах начиная с 1 января 2000 года. Финансовый поток проекта имеет вид:

$$(-1000, -2000, -3000, 1500; t = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 4; f(t) = 1000, 6 \le t \ge 16).$$

Уравнение доходности имеет вид:

$$F(r) = -1000 - \frac{2000}{1+r} - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{1500}{(1+r)^4} + \int_6^{16} \frac{1000dt}{(1+r)^t} = 0 .$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} R_k + \int_0^{10} 1000dt = 5500 > 0 ,$$

то это уравнение имеет единственное положительное решение. После вычисления определенного интеграла получаем

$$F(r) = -1000 - \frac{2000}{1+r} - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{1500}{(1+r)^4} + \frac{1000}{\ln(1+r)}\left[\frac{1}{(1+r)^6} - \frac{1}{(1+r)^{16}}\right].$$

Так как F(0,08) = 74,136 > 0, F(0,09) = − 300,899 < 0, то доходность заключена между 8% и 9% годовых. С точностью до четвертого знака после запятой доходность равна 8,1884 %.

9. Конечная годовая рента

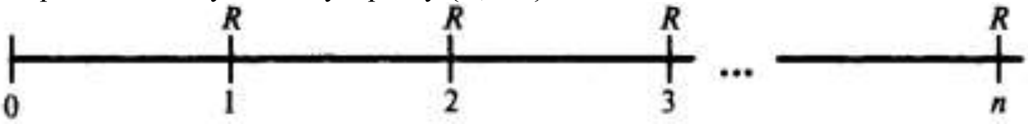
Определение. Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется *рентой*. Часто сами платежи также являются одинаковыми. *Конечная годовая рента* – это самая простая рента: в ней платежи производятся только один раз в год, величина платежа R, длительность n лет, годовая процентная ставка i. На рентные платежи начисляются сложные проценты. В обычной ренте платежи поступают в конце очередного года.

Пример. Рассмотрим 5-летнюю ренту с годовым платежом 1000 руб., процентная ставка i = 10%.

Годовые платежи		**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**
Предыдущий остаток			**1100**	**2310**	**3641**	**5105,1**
Номер года	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Всего на счете		**1000**	**2100**	**3310**	**4641**	**6105,1**

Поясним движение денежныхсумм. В конце 1-го года в банк вносится 1000 руб. В конце 2-го года эта сумма возрастает до 1100 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом в 1000 руб. на счете уже 2100. В конце 3-го года эта сумма возрастает до 2310 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом на счете теперь уже 3310 руб. и т.д. Наращенная сумма ренты равна 6105,1 руб. Современную величину ренты найдем, дисконтируя к моменту 0 наращенную сумму 6105,1. Получаем $6105{,}1/1{,}1^5 = 3791$.

Изучим подробно конечную годовую ренту {R, n, i} в общем виде:



Главная задача — найти *современную величину* A этой ренты и ее конечную величину S. Имеем

$$A = R/(1 + i) + R/(1 + i)^2 + \ldots + R/(1 + i)^n = R\,[1 - (1 + i)^{-n}]/i.$$

Множитель, на который умножается величина рентного платежа R, чтобы получить современную величину ренты A, называется *коэффициентом приведения (дисконтирования) ренты*:

$$a(n,i) = a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

С учетом этого обозначения имеем

$$A = R \cdot a(n,i).$$

Зная современную величину ренты, можно легко найти конечную ее величину, которая называется еще наращенной величиной ренты S:

$$S = A(1 + i)^n = R\,[(1 + i)^n - 1]\,/\,i.$$

Множитель, на который умножается величина рентного платежа R, чтобы получить наращенную величину ренты A, называется *коэффициентом наращения ренты*:

$$s(n,i) = s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

С учетом этого обозначения имеем

$$S = R \cdot s(n,i)$$

Величины a(n,i) и s(n,i) связаны очевидным соотношением:

$$s(n,i) = a(n,i) \cdot (1 + i)^n$$

В прошлом веке, до широкого распространения компьютеров использовались таблицы коэффициентов приведения и наращения годовой ренты. Приведем фрагменты этих таблиц для иллюстрации.

Коэффициенты приведения годовой ренты $a(n,i) = [1 - (1 + i)^{-n}]/i$

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2,829	1,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487	2,444
4	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170	3,102
5	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,696
6	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,231
7	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,712
8	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	5,146
9	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759	5,537
10	8,530	8,110	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,889

Коэффициенты наращения годовой ренты $s(n,i) = [(1 + i)^n - 1]/i$

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,342
4	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,710
5	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,228
6	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	7,913
7	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	9,783
8	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028	11,436	11,859
9	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021	13,579	14,164
10	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193	15,937	16,722

Пример. Найти современную и наращенную величины годовой ренты с R = 1000, n = 8, i = 8%.

Находим по таблицам a(8, 8) = 5,747, s(8, 8) = 10,637. Значит, современная величина ренты равна 5747, наращенная — 10637.

10. Основные параметры и виды рент

Основные параметры ренты:

- *член ренты* R — сумма отдельного платежа;
- *период ренты* — временной интервал между двумя соседними платежами;
- *срок ренты* — время от начала первого периода ренты до конца последнего;
- *процентная ставка ренты* i — сложная процентная ставка, используемая для наращения и дисконтирования членов ренты;
- m — число начислений процентов в году на члены ренты;
- p — число платежей в году.

Если члены ренты выплачиваются раз в год, то рента называется *годовой*.

Если члены ренты выплачиваются *p* раз в году (*p* > 1), то рента называется *p-срочной*.

Если платежи поступают столь часто, что можно считать $p \to \infty$, то ренту называют *непрерывной*.

Рента называется *постоянной*, если члены ренты одинаковы и не изменяются во времени.

Рента называется *переменной*, если члены ренты изменяются во времени в соответствии с некоторым временным законом.

Если число членов ренты конечно, то рента называется *конечной*. Срок действия такой ренты ограничен.

Если срок действия ренты не ограничен, то ренту называют *бессрочной* или *вечной*.

Если платежи производятся в конце каждого периода ренты, то рента называется *обычной* рентой или рентой *постнумерандо*.

Рента с платежами в начале каждого периода называется рентой *пренумерандо*.

Бывает также рента с платежами в середине периода.

11. Рента постнумерандо

Рассмотрим расчет современной стоимости и наращенной суммы постоянной обычной *p*-срочной ренты (постнумерандо). Ежегодно сумма R вносится равными долями *p* раз в году на банковский счет в течение *n* лет.

Тогда имеем поток из *np* платежей величиной *R/p* каждый в моменты времени $1/p$, $2/p$,..., n. Примем за единицу измерения времени 1 год. Пусть i — годовая эффективная процентная ставка начисления сложных процентов на поступающие платежи. Согласно определению современной стоимости потока платежей получаем:

$$A=\sum_{k=1}^{np} R_k v(t_k)=\frac{R}{p}\sum_{k=1}^{np}(1+i)^{-\frac{k}{p}}=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$

— современная стоимость постоянной обычной *p*-срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в год в течение *n* лет.

Отсюда можно получить современную стоимость годовой обычной ренты (p = 1) при начислении процентов 1 раз в год, взяв $p=1$; а также, используя соотношения эквивалентности для эффективной процентной ставки

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \quad \text{и} \quad 1+i=e^{\delta}$$

можно получить современную стоимость обычной *p*-срочной ренты при начислении на члены ренты сложных процентов m раз в году по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$ и при непрерывном начислении процентов при постоянной интенсивности процентов δ в год. Ниже приведены формула для современной стоимости и наращенной суммы ренты в указанных случаях.

Вид ренты	Современная стоимость ренты	Наращенная сумма ренты
Обычная годовая рента	$A=R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$S=R\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$
Обычная *p*-срочная рента	$A=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$	$S=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$
Обычная *p*-срочная рента при начислении на члены ренты сложных процентов *m* раз в году	$A=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{1-(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{-mn}}{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1}$	$S=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}-1}{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1}$
Обычная *p*-срочная рента при непрерывном начислении процентов	$A=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-n\delta}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}$	$S=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{e^{n\delta}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}$
Обычная *p*-срочная рента при *m*=*p* (период начисления процентов равен периоду ренты)	$A=R\dfrac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{i^{(p)}}$	$S=R\dfrac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{i^{(p)}}$

Коэффициенты дисконтирования и наращения обычной *p*-срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение n лет равны соответственно

$$a_{n,i}^{(p)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \quad \text{и} \quad s_{n,i}^{(p)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$

Если применяется *p*-срочная рента с начислением процентов *p* раз в год (m = p) по годовой номинальной ставке $i^{(p)}$ то за единицу измерения времени можно принять 1/p часть года. Тогда R / p — выплата за единицу времени (постнумерандо), $i^{(p)}/p$ — процентная ставка за 1 единицу времени, срок ренты — *np* единиц времени. Коэффициенты дисконтирования и наращения такой ренты равны соответственно

$$\frac{A}{R/p} = a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} \quad \text{и} \quad \frac{S}{R/p} = s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} \;.$$

и также могут быть найдены по таблицам коэффициентам дисконтирования и наращения обычной годовой ренты $a_{n,i}$ и $s_{n,i}$.

Пример. В конце каждого месяца на сберегательный счет инвестируется 200 руб. На поступающие платежи ежемесячно начисляют сложные проценты по годовой ставке 12 %. Какова величина вклада через 2 года?

Взносы на сберегательный счет поступают в виде обычной p-срочной ренты с начислением процентов p раз в году в течение 2 лет. Здесь n = 2, p = 12, I = 0,12. Если за единицу измерения времени принять 1 месяц, то R/p = 200 руб. — выплата за единицу времени, $i^{(p)}/p$ =0,12/12 = 0,01 — процентная ставка за 1 единицу времени, срок ренты np = 24 единицы времени. По таблице коэффициентов наращения дискретных рент находим $s_{24,\ 0.01}$ = 26,97346485. Тогда наращенная сумма вклада через два года равна

$$S = \frac{R}{p} s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} = 200 s_{24,\ 0.01} = 5394{,}69 \text{ (руб.)}$$

12. Рента пренумерандо

Связь между коэффициентами дисконтирования и наращения рент пренумерандо и постнумерандо следует из их определения. Срок дисконтирования каждого платежа ренты пренумерандо уменьшается, а срок наращения увеличивается на один период ренты по сравнению с обычной рентой. По-прежнему единицей измерения времени считаем 1 год.

Для годовых рент имеют место следующие соотношения (коэффициенты для рент пренумерандо помечены сверху волной):

$$\tilde{a}_{n,\ i} = (1+i)a_{n,\ i}$$

$$\tilde{s}_{n,\ i} = (1+i)s_{n,\ i}$$

$$\tilde{s}^{(p)}_{n,\ i} = (1+i)^n \tilde{a}_{n,\ i} \;.$$

Если применяется p-срочная рента пренумерандо (платежи поступают в начале каждого периода длиной 1/p) при начислении на члены ренты процентов 1 раз в год, то справедливы соотношения:

$$\tilde{a}^{(p)}_{n,\ i} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a^{(p)}_{n,\ i} \;,$$

$$\tilde{s}^{(p)}_{n,\ i} = (1+i)^{\frac{1}{p}} s^{(p)}_{n,\ i} \;,$$

$$\tilde{s}^{(p)}_{n,\ i} = (1+i)^n \tilde{a}^{(p)}_{n,\ i} \;.$$

При непрерывном начислении процентов для p-срочной ренты имеем соотношения:

$$\tilde{a}^{(p)}_{n,\ \delta} = e^{\frac{1}{p}} a^{(p)}_{n,\delta} \;,$$

$$\tilde{s}^{(p)}_{n,\ \delta} = e^{\frac{1}{p}} s^{(p)}_{n,\delta} \;,$$

$$\tilde{s}^{(p)}_{n,\ \delta} = e^{n\delta} \tilde{a}^{(p)}_{n,\delta} \;.$$

13. Непрерывная рента

Коэффициенты дисконтирования и наращения постоянной непрерывной ренты можно получить из формул для p-срочной ренты при p → ∞, или по определению для непрерывного равномерно выплачиваемого потока платежей с постоянной годовой интенсивностью f(t) = 1. Например, для постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов по постоянной силе роста δ получаем:

$$\bar{a}_{n,\delta} = \lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{n,\delta} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-e^{-n\delta}}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-e^{-n\delta}}{p\left(\frac{\delta}{p}\right)} = \frac{1-e^{-n\delta}}{\delta} \;,$$

где $a^{(p)}_{n,\delta}$ — коэффициент дисконтирования обычной p-срочной ренты при непрерывном начислении процентов. Заметим, что так как

$$\lim_{p\to\infty}\tilde{a}^{(p)}_{n,\delta}=\lim_{p\to\infty}e^{\frac{1}{p}}a^{(p)}_{n,\delta}=\lim_{p\to\infty}a^{(p)}_{n,\delta},$$

то при непрерывно поступающих платежах различие между рентами пренумерандо и постнумерандо исчезает.

Коэффициент дисконтирования постоянной непрерывной ренты при начислении процентов 1 раз в год получим по определению:

$$\bar{a}_{n,i}=\int_0^n f(t)v(t)dt=1\cdot\int_0^n(1+i)^{-t}dt=-\frac{(1+i)^{-t}}{\ln(1+i)}\bigg|_0^n=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Коэффициенты наращения непрерывных рент можно найти из равенств

$$\bar{s}_{n,\,\delta}=e^{n\delta}\,\bar{a}_{n,\,\delta}=\frac{e^{n\delta}-1}{\delta},$$

$$\bar{s}_{n,\,i}=(1+i)^n\,\bar{a}_{n,\,i}=\frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}.$$

При необходимости можно установить соотношения между коэффициентами дисконтирования рассмотренных трех видов рент —постнумерандо, пренумерандо и непрерывной.

$$a^{(p)}_{n,i}=a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}}=\bar{a}_{n,\,\delta}\,\frac{\delta}{i^{(p)}},$$

где $a_{n,i}$, $\bar{a}_{n,\delta}$ — коэффициенты дисконтирования обычной годовой ренты с начислением процентов 1 раз в год и постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов соответственно. Аналогично для ренты пренумерандо,

$$a^{(p)}_{n,\,i}=\frac{\tilde{a}^{(p)}_{n,\,i}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}=a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}}=\frac{\tilde{a}_{n,\,i}}{(1+i)}\cdot\frac{i}{i^{(p)}}=\tilde{a}_{n,\,i}\,\frac{d}{i^{(p)}},$$

где d = i / (1+i) – эквивалентная учетная ставка; и далее:

$$i\,a_{n,i}=i^{(p)}\,a^{(p)}_{n,i}=d\,\tilde{a}_{n,i}=d^{(p)}\,\tilde{a}^{(p)}_{n,i}=\delta\,\bar{a}_{n,\delta}$$

где $d^{(p)} = i^{(p)} / (1+i)^{1/p}$ – эквивалентная номинальная учетная ставка.

Каждое выражение в этом равенстве — современная стоимость процентов, выплачиваемых по займу 1 руб. на протяжении n лет в соответствии с различными способами выплаты процентов.

14. Вечная рента

Если полагают, что срок ренты $n = \infty$, то ренту называют *вечной* или *бессрочной*. Наращенная сумма вечной ренты бесконечна. Однако современную величину такой ренты можно найти. Для обычной годовой бессрочной ренты с начислением процентов 1 раз в год при $n \to \infty$ получаем:

$$A=\lim_{n\to\infty}R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{R}{i}.$$

Вычисления показывают, что коэффициент дисконтирования такой ренты, а также аналогичной ренты пренумерандо могут быть вычислены по формулам:

$$a_{\infty,i}=\frac{1}{i},\quad \tilde{a}_{\infty,\,i}=\frac{1}{d},\quad \tilde{a}_{\infty,\,i}=1+a_{\infty,\,i}.$$

Для вечной *p*-срочной ренты постнумерандо и пренумерандо с начислением процентов 1 раз в год имеем

$$a^{(p)}_{\infty,i}=\frac{1}{i^{(p)}},\quad \tilde{a}^{(p)}_{\infty,\,i}=\frac{1}{d^{(p)}},\quad \tilde{a}^{(p)}_{\infty,\,i}=\frac{1}{p}+a^{(p)}_{\infty,\,i}.$$

Пример. Бизнесмен арендовал виллу за \$10 000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Решение. Эта выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна A = R/i = $200 000. Заметим, что рентные платежи — это в точности годовые процентные деньги, которые стал бы получать арендодатель с $200 000, помещенных в банк под ту же процентную ставку.

15. Отсроченная рента

Если начало ренты, т.е. начало ее первого периода, переносится в будущее на t единиц времени относительно текущего момента t = 0, то такую ренту называют *отсроченной*. Современная стоимость отсроченной ренты A_t определяется путем дисконтирования по процентной ставке ренты в течение времени t современной стоимости A неотсроченной ренты:

$$A_t = \nu(t)A.$$

Пример. По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн. руб. оплачивается в рассрочку в конце каждого квартала в течение пяти лет с начислением сложных процентов раз в год по ставке 10% годовых. Найти величину отдельного взноса, если начало оплаты продукции перенесено на полгода после подписания контракта.

Если начало отсчета времени t = 0 — это момент подписания контракта, а единица измерения времени 1 год, то здесь n = 5, p = 4, i = 0,1, t = 0,5. Согласно предыдущей формуле стоимость потока платежей по оплате продукции на момент подписания контракта равна

$$A_t = \nu(t)A = \frac{1}{(1+i)^t}A\ ,$$

где A_t = 2 млн. руб., A — современная стоимость неотсроченной обычной *p*-срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение n лет:

$$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{1}{(1+i)^p-1}}$$

Из этих формул находим величину отдельного взноса R/p = 133432,20 руб. против

$$\frac{1}{(1+i)^t}\ 133432{,}20\ =\ 127222{,}61\ \text{руб.},$$

если бы начало оплаты продукции не откладывалось.

16. Свойства коэффициентов наращения и дисконтирования ренты

Рассмотрим зависимость коэффициентов дисконтирования и наращения ренты от срока ренты и процентной ставки. Поскольку характер зависимости не должен зависеть от числа платежей в году, рассмотрим годовую обычную ренту с начислением процентов 1 раз в год. Параметры ренты: m = p = 1, срок n лет, годовая процентная ставка i.

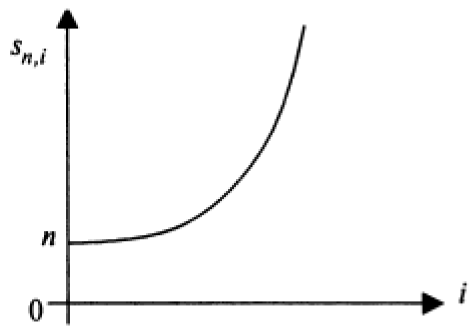
Зависимость от процентной ставки . Установим зависимость от i коэффициента наращения ренты $s_{n,i}$. Так как

$$s_{n,i} = (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) + 1,$$

то

$$(s_{n,i})'_i > 0,\ (s_{n,i})''_{ii} > 0 \text{ и } s_{n,i} = \left((1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) + 1\right)\Big|_{i=0} = n\ ;\ \lim_{i\to\infty} s_{n,i} = \infty\ ,$$

следовательно, $s_{n,i}$ — возрастающая выпуклая функция аргумента i (см. рис.).



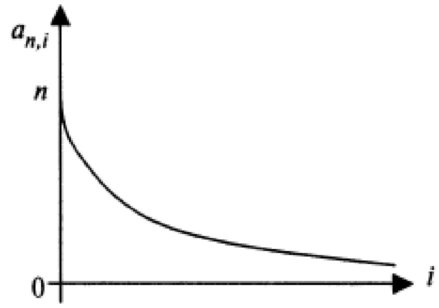
Установим зависимость от i коэффициента наращения ренты $a_{n,i}$. Так как

$$a_{n,i} = \frac{1}{1+i} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

то

$$(a_{n,i})'_i < 0,\ (a_{n,i})''_{ii} > 0 \quad \text{и} \quad a_{n,i} = \left(\frac{1}{1+i} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)\Bigg|_{i=0} = n\ ;\ \lim_{i\to\infty} a_{n,i} = 0\ ,$$

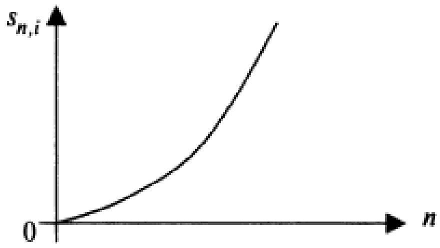
следовательно, $a_{n,i}$ — убывающая выпуклая функция аргумента i (см. рис.).



Зависимость от срока ренты. Аналогично получаем:

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\ , \text{ где } n \geq 0.$$

$s_{n,i}$ — возрастающая выпуклая функция аргумента n (см. рис.).



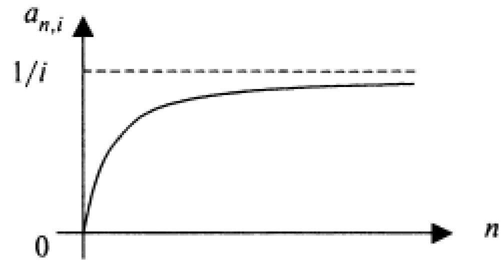
Так же

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ , \text{ где } n \geq 0.$$

и здесь

$$(a_{n,i})'_n > 0,\ (a_{n,i})''_{nn} > 0;\ a_{n,i} = 0 \text{ при } n = 0;\ \lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \frac{1}{i}$$

поэтому $a_{n,i}$ — возрастающая вогнутая функция аргумента n (см. рис.).



17. Определение параметров ренты

Параметры ренты R, n, i рассматриваются как основные, p и m — как вспомогательные. При разработке контрактов возможны случаи, когда задается современная стоимость A или наращенная сумма ренты S и два основных параметра. Требуется найти третий параметр.

Определение члена ренты. Рассматриваются задачи типа: заданы S, n, i или A, n, i. Найти R (годовая рента). Значения годового взноса R находят из равенств:

$$S = R\,s_{n,i} \quad \text{и} \quad A = R\,a_{n,i}.$$

Определение срока ренты. Заданы A, R, i. Найти n.

Так как

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

отсюда получаем условие разрешимости задачи о сроке ренты:

$$R > Ai.$$

В общем случае, когда заданы $A, \frac{R}{p}, \frac{i^{(m)}}{m}$, то условие разрешимости задачи имеет вид:

$$\frac{R}{p} > A\left((1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right).$$

Если заданы S, R, n, то задача определения срока ренты n всегда разрешима. Для нахождения n выражения современной стоимости и наращенной суммы разрешают относительно n.

Определение процентной ставки ренты. Заданы A, R, n. Найти i.

Так как

$$A = R\left(\frac{1}{1+i}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right) < Rn,$$

если i > 0, то условие разрешимости задачи имеет вид:

$$A < Rn.$$

Если заданы S, R, n, то условие разрешимости задачи о нахождении процентной ставки ренты в этом случае имеет вид:

$$S > Rn.$$

При выполнении условия разрешимости процентная ставка ренты находится либо по таблицам, либо из соответствующего уравнения каким-либо приближенным методом.

18. Дюрация потоков платежей

Пусть i и $\mu = (1 + i)$ — процентная ставка и коэффициент наращения соответственно. Пусть $P = (R_k,t_k)$ — поток платежей, R_k — величина платежа в момент t_k. Современную величину этого потока равна:

$$A = \sum_k A_k,$$

где

$$A_k = R_k \exp(-t_k \ln \mu)$$

есть современная величина k-го платежа.

Определение. *Дюрацией потока платежей* P называется эластичность современной величины потока по коэффициенту наращения

$$E_\mu^A = (dA/d\mu):(A/\mu)$$

взятая со знаком «минус».

Дюрация обозначается Dur(P), итак

$$\mathrm{Dur}(P) = -E_\mu^A.$$

Напомним определение эластичности. Пусть x — величина-аргумент, y — величина-функция от x, тогда *эластичностью* y по отношению к x в точке x_0 называется предел отношения относительного изменения величины y к относительному изменению величины x, т.е.

$$(\Delta y/y_0):(\Delta x/x_0) \text{ при } \Delta x \to 0;$$

таким образом,

$$E_x^y(x_0) = (dy/y_0)/(dx/x_0) = (dy/dx):(y_0/x_0) = y(x_0)x_0/y_0.$$

Так что, если эластичность равна (−2), то при увеличении x на 1% величина y уменьшается на 2%. Итак, дюрация характеризует чувствительность современной величины потока к изменению коэффициента наращения, — если дюрация потока равна 2, то при увеличении коэффициента наращения на 1% современная величина потока уменьшается на 2%.

Найдем дюрацию потока платежей P, продифференцировав современную величину потока по коэффициенту наращения. Так как

$$dA/d\mu = d\left(\sum_k R_k \exp(-t_k \ln\mu)\right)/d\mu = \sum_k \left(-t_k R_k \exp((-t_k - 1)\ln\mu)\right),$$

то

$$E_\mu^A = (dA/d\mu):(A/\mu) = \left(\sum_k - t_k R_k \exp((-t_k - 1)\ln\mu)\right):(A/\mu) =$$
$$= -\sum_k t_k (R_k \exp(-t_k \ln\mu)/A) = -\sum_k t_k (A_k / A) = -\operatorname{dur}(\mathbf{P})$$

следовательно,

$$\operatorname{dur}(\mathbf{P}) = \sum_k t_k (A_k / A).$$

Предположим теперь, что все платежи неотрицательны, тогда все величины A_k также неотрицательны и их сумма в точности равна А, так что сумма всех величин A_k / A равна 1. Поэтому отношения A_k / A можно трактовать как вероятности, а величину $\sum t_k (A_k / A)$ — как средний момент платежей в следующем смысле: определим случайную величину Т как дискретную, такую, что

$$P(T = t_k) = A_k / A,$$

тогда ее математическое ожидание

$$\bar{T} = M[T] = \sum_k t_k (A_k / A)$$

равно в точности

$$\sum_k t_k (A_k / A) = \operatorname{Dur}(\mathbf{P}).$$

Итак, имеем следующий вывод: средний момент платежа и дюрация потока неотрицательных платежей равны.

Пример. Найдем дюрацию 5-летней ренты с годовым платежом R = 1000 руб. и годовой процентной ставкой i = 10% . Случайная величина T имеет ряд распределения:

0	1	2	3	4	5
	0,24	0,22	0,20	0,18	0,16

Поясним, как получились вероятности 0,24 и т.д. Наращенная величина ренты равна 6105 руб., а наращенные величины платежей, т.е. дисконтированных к концу 5-го года, равны соответственно 1464, 1331 и т.д., так что 1454/6105 = 0,24 и т.д. Вычисляя дюрацию как математическое ожидание случайной величины T, получим:

1(0,24) + 2(0,22) + ... = 2,8.