Производные финансовые инструменты

1. Финансовый рынок в условиях неопределенности

Вот лишь некоторые из вопросов, которые естественно возникают при соприкосновении с теорией и практикой финансового рынка:

- как функционирует финансовый рынок в условиях неопределенности,
- как складываются и описываются цены и какова их динамика во времени,
- на какие концепции и теории следует опираться при расчетах,
- предсказуемо ли будущее движение цен,
- каков риск тех или иных финансовых инструментов.

При описании динамики цен и расчетах, например, стоимостей производных финансовых инструментов обычно придерживаются той точки зрения, что рынок ведет себя так, что на нем отсутствуют *арбитражные возможности*. С математической точки зрения эта экономически понятная концепция приводит, по существу, к тому, что существует так называемая *мартингальная* (*риск-нейтральная*) вероятностная мера, относительно которой (нормированные) цены оказываются мартингалами, что дает, в свою очередь, возможность использования хорошо развитого аппарата стохастического исчисления для изучения их эволюции и для расчетов.

В 1920-х гг., к которым относят зарождение теории финансов, основной ее интерес был связан, главным образом, с вопросами администрирования и увеличения фондов, а ее математика сводилась, в сущности, к подсчету сложных процентов.

Последующее развитие шло в двух направлениях — в предположении полной определенности (в ценах, спросе, предложении, и т.п.) и предположении условий неопределенности,

В первом случае определяющую роль сыграли работы И. Фишера, Ф. Модильяни и М. Миллера, рассматривавших вопросы оптимальных решений для индивидуумов и фирм соответственно. С математической точки зрения дело сводилось к задачам максимизации функций многих переменных при наличии ограничений.

Во втором случае прежде всего следует отметить работу Г. Марковитца 1952 года и работу М.Кендалла 1953 года. Работа Кендалла 1953 года, доложенная им на заседании Королевского статистического общества Великобритании, относилась к вопросу о том, как ведут себя цены на рынке, какими стохастическими процессами описывается динамика этих цен.

Работа Марковитца, заложившая основы теории *портфеля ценных бумаг*, была посвящена проблеме оптимизации инвестиционных решений в условиях неопределенности. Соответствующий вероятностный анализ выявил исключительно важную роль ковариаций между ценами как того ключевого ингредиента, от которого зависит степень (несистематического) риска создаваемого портфеля (набора) ценных бумаг. Именно в работе Марковитца была в полной мере осознана роль идеи диверсификации при составлении портфеля для редуцирования несистематического риска, оказавшей свое влияние на создание в 1964 г. В. Шарпом и в 1976 году С. Россом двух классических теорий:

- CAPM — Capital Asset Pricing Model (Модель ценообразования основных фондов),
- APT — Arbitrage Pricing Theory (Арбитражная теория ценообразования),

дающих объяснение того, как складывается и чем определяется доход той или иной ценной бумаги (скажем, акции) в зависимости от состояния глобального рынка, на котором эта ценная бумага функционирует (CAPM-теория), от каких факторов этот доход зависит (APT-теория) и из каких концепций следует исходить при финансовых расчетах.

Говоря о риске, следует иметь в виду, что в финансовой теории обычно различают два его вида:

- *несистематический* риск, который можно редуцировать диверсификацией — тот, на который инвестор может повлиять своими действиями,
- *систематический*, или собственно *рыночный* риск.

Примером систематического риска может служить риск, связанный, скажем, со стохастической природой процентных ставок, индексов акций, и на который (малый) инвестор не может оказать влияния своими действиями. Это не означает, конечно, что с этим риском нельзя бороться. По существу, именно с целью контролирования возможного систематического риска, с целью выработки рекомендаций для рациональных финансовых решений, с целью защиты от больших и катастрофических рисков (как, например, в страховании) и создаются, притом довольно сложные, системы по сбору статистических данных, их обработке, предсказанию возможного движения цен на рынке. Именно этой цели служат производные финансовые инструменты. Именно этой цели служит и развитая для них техника хеджирования (более сложная, нежели диверсификация) — учитывающая вероятностные изменения в будущем движении цен и преследующая цель редуцировать риск от возможных неблагоприятных последствий этих изменений.

2. Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка

В 1930-х гг. появилось несколько исследований, в которых проводился эмпирический анализ различных финансовых характеристик с целью получения ответа на сакраментальный вопрос: предсказуемо ли движение цен, стоимостей и т.п.? Хотя эти работы содержали богатый статистический материал и интересные неожиданные выводы о том, что, скорее всего, приращения

$$h_k = \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}$$

логарифмов цен S_k являются независимыми, ни экономисты, ни практики не обратили должного внимания на эти работы. Происходило это потому, что в то время, с одной стороны, экономисты рассматривали вопросы динамики цен как нечто второстепенное в экономической системе, а с другой стороны, не так много экономистов в то время имело соответствующую математическую подготовку и владело статистической техникой.

Что касается практической стороны дела, то выводы этих работ о том, что последовательность

$$(H_k)_{k\geqslant 1} \text{ с } H_k = h_1 + \dots + h_k$$

носит характер случайного блуждания (иначе — есть сумма независимых случайных величин) , не согласовывались с бытующим среди практиков мнением, что цены следуют некоторым ритмам, циклам, трендам, выявление которых вроде бы только и могло дать основу для предсказания движения цен.

Отправной точкой в работе Кендалла 1953 г. послужило желание выявить цикличность в поведении цен акций и товаров. Анализируя реальные статистические данные (недельные данные для девятнадцати акций в период с 1928 по 1938 год, месячные средние цены на пшеницу на Чикагском рынке с 1883 по 1934 годы и на хлопок на Нью-Йоркской торговой бирже с 1816 по 1951 годы), он, к своему удивлению, не смог обнаружить ни ритмов, ни трендов, ни циклов и, более того, пришел к заключению, что ряд наблюдаемых данных выглядит так, как если бы "Демон Случая извлекал случайным образом число и добавлял его к текущему значению для определения цены в следующий момент". Иначе говоря, представляется, что логарифмы цен S_n ведут себя как случайное блуждание, т.е.

$$S_n = S_0 e^{H_n}$$

На самом деле, идея использования "случайного блуждания" для описания эволюции цен была впервые высказана Л. Башелье в его диссертации 1900 года "Теория спекуляции". Башелье считал, что цены (а не логарифмы цен, между прочим) меняют свои значения в моменты времени Δ, 2Δ,..., причем так, что цена

$$S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0 + \xi_\Delta + \xi_{2\Delta} + \dots + \xi_{k\Delta},$$

где $(\xi_{i\Delta})$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тем самым,

$$\mathsf{E}S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0, \qquad \mathsf{D}S_{k\Delta}^{(\Delta)} = \sigma \cdot (k\Delta).$$

Формальным предельным переходом Башелье получает, что предельный процесс

$$S = (S_t)_{t\geqslant 0}, \quad S_t = \lim_{\Delta\to 0} S_{[\frac{t}{\Delta}]\Delta}^{(\Delta)}$$

(предел должен пониматься в некотором подходящем вероятностном смысле) имеет вид

$$S_t = S_0 + \sigma W_t$$

где $W = (W_t)$ есть то, что теперь принято называть *стандартным броуновским движением,* или *винеровским процессом,* т.е. случайным процессом с независимыми гауссовскими (нормальными) приращениями и непрерывными траекториями. Стандартность броуновского движения означает, что

$$W_0 = 0, \ \mathsf{E}W_t = 0, \ \mathsf{E}W_t^2 = t$$

Более поздние исследователи пришли к выводу, что не сами цены S_t (с которыми оперировал Башелье), а их логарифмы подчиняются броуновскому движению (со сносом). Эта же мысль получила затем свое развитие в работе П. Самуэльсона, введшего в финансовую теорию и практику геометрическое броуновское движение

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \qquad t \geqslant 0,$$

.

Хотя гипотеза случайного блуждания для описания эволюции цен не сразу была принята экономистами, но именно она-то и привела к классической концепции *рационально функционирующего* (или, как обычно принято говорить, *эффективного*) рынка. С наглядной точки зрения эффективность здесь означает то, что рынок рационально реагирует на обновление информации — под этим подразумевается, что на рынке:

1) мгновенно производится коррекция цен, которые устанавливаются так, что оказываются в состоянии равновесия, становятся справедливыми, не оставляя места участникам рынка для арбитражных возможностей, т.е. получения прибыли за счет разницы в ценах;

2) участники рынка (трейдеры, инвесторы, и др.) однородно интерпретируют поступающую информацию, при этом мгновенно корректируют свои решения при обновлении этой информации;

3) участники рынка однородны в своих целевых установках, их действия носят коллективно-рациональный характер.

С формальной же точки зрения понятие эффективности должно рассматриваться по отношению и в зависимости от характера получаемой рынком и его участниками информации.

Принято различать следующие три вида доступной информации:

1° информация, содержащаяся в прошлых значениях цен;

2° информация, содержащаяся не только в прошлых значениях цен, но и в публично доступных источниках (газеты, бюллетени, телевидение, а теперь и интернет);

3° вся мыслимая информация.

Для уточнения используемого здесь понятия «информация» будем исходить из того, что неопределенность, возникающая на рынке, может быть описана как случайность в рамках некоторого вероятностного пространства.

В конечном счете, эффективность рынка надо понимать просто как мартингальность цен его активов. (Свойство *мартингальности* случайного процесса можно сформулировать так: среднее значение процесса в будущем периоде, при условии известной истории процесса до текущего момента, равно значению процесса в текущий момент времени.). Частным случаем такого рынка является рынок, где цены ведут себя как случайное блуждание. А наилучшее объяснение дается в рамках теории безарбитражных рынков, в которой эффективность рынка просто ассоциируется с отсутствием арбитражных возможностей.

3. Общая характеристика производных финансовых инструментов

Временной срез рыночной экономики представлен двумя сегментами: спотовым и срочным рынками. *Спотовый рынок* — это рынок, на котором сделка заключается и сразу же исполняется. Законодательство разных стран обычно отводит контрагентам несколько дней с момента заключения сделки для осуществления взаиморасчетов.

Срочный рынок — это рынок, на котором заключаются и обращаются срочные контракты. Срочный контракт представляет собой соглашение о будущей поставке предмета контракта. В момент его заключения оговариваются все условия, на которых он будет исполняться, в том числе и цена.

В основе контракта лежит некоторый актив. Его называют *базисным активом*. В качестве базисного актива обычно выступают ценные бумаги, фондовые индексы, банковские депозиты, валюта, собственно товары, сами срочные контракты.

В основе срочного контракта могут лежать финансовые или товарные активы. В первом случае говорят о *финансовых*, во втором о *товарных* срочных контрактах.

Срочный контракт возникает на основе базисного актива. Поэтому его также называют *производным* активом, или *производным* инструментом. Другое название производного инструмента – *дериватив*.

Срочный рынок выполняет в экономике важные функции. Во-первых, позволяет согласовывать планы предпринимателей на будущее. Заключив срочный контракт, предприниматели обеспечивают себе гарантированный сбыт или покупку товара в будущем. Во-вторых, позволяет страховать ценовые риски. В контракте контрагенты устанавливают цену будущих взаиморасчетов. Поэтому они не зависят от конъюнктуры рынка, которая сложится к моменту истечения его срока. В-третьих, он позволяет прогнозировать будущую конъюнктуру. На срочном рынке формируются срочные цены. Они в определенной степени отражают ожидания участников рынка относительно будущего состояния экономики.

Срочный рынок является высокодоходным, но и очень рискованным полем инвестирования. Доходность спекулятивных операций с производными инструментами потенциально может достигать нескольких тысяч процентов годовых. Однако большими могут оказаться и потери.

Структурно на срочном рынке выделяют первичный и вторичный, биржевой и внебиржевой сегменты. По виду торгуемых инструментов его можно подразделить на *форвардный, фьючерсный, опционный* рынки, рынки *свопов, варрантов, комбинаций, спрэдов* и др.

Напомним терминологию. Обычно о том, кто хочет что-то купить, говорят, что он занимает *длинную* (long) позицию. Тот же, кто обязуется осуществить поставку, занимает *короткую* (short) позицию.

Существует специальная терминология для тех, кто играет на повышение и на понижение. ***Бык*** (bull) — дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий, что цены поднимутся. Рынок 'быков' — это такой рынок, на котором дилер с большей вероятностью будет покупать, а не продавать, причем он может покупать даже за свой собственный счет, открывая позицию 'быка'. 'Бык' с открытой длинной позицией надеется продать по более высокой цене то, что он купил, после повышения конъюнктуры на рынке.

Медведь (bear) — дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий падения цен. 'Медвежий рынок' — это рынок, на котором дилер с большей вероятностью будет продавать ценные бумаги, валюту или товары, нежели покупать их. Он может даже продавать ценные бумаги, валюту или товары, которых у него нет. Такие операции носят название короткие продажи, или 'установление медвежьей позиции'. 'Медведь' надеется закрыть (или покрыть) свою короткую позицию путем покупки ценных бумаг, валюты или товаров по ценам, более низким по сравнению с теми, по которым он их продал. Разница между ценой покупки и первоначальной ценой продажи представляет собой прибыль 'медведя'.

4. Форвардные контракты

Общая характеристика форвардных контрактов

Форвардные контракты предназначены для поставки базового актива по фиксированной цене поставки в определенный момент в будущем. Они идеально подходят для целей хеджирования. Исполнение контракта происходит в соответствии с условиями, которые были согласованы участниками в момент его заключения.

Пример 1. Рассмотрим зернового фермера, который заключает форвардный контракт с производителем питания на поставку 100000 бушелей зерна по цене $2,5 за бушель 27 сентября 2014 г. Предположим, что стоимость семенного зерна составляет $2,0 за бушель. Тогда подобный контракт выгоден обеим сторонам: фермеру, поскольку у того есть покупатель по приемлемой цене, и производителю, поскольку зная стоимость зерна задолго до событий, он сможет уменьшить неопределенность в планировании. Если же спот-цена к моменту поставки возрастет, то фермер упустит возможность получить прибыль. С другой стороны, если цена упадет, то производитель заплатит больше, чем он хотел бы. Таким образом, форвардное соглашение ограничивает как риск, так и потенциальную выгоду. Проблемы могут возникнуть, если один из участников не сможет выполнить свои обязательства. Производитель питания может обанкротиться, а фермер может разориться, поскольку окажется не в состоянии поставить 100000 бушелей зерна из-за плохой погоды или стоимость семенного зерна стремительно поднимется вверх.

Форвардный контракт — это твердая сделка, т. е. сделка, обязательная для исполнения. Лицо, которое обязуется купить базисный актив по контракту, открывает длинную позицию, т.е. покупает контракт. Лицо, продающее базисный актив по контракту, открывает короткую позицию, т.е. продает контракт.

Предметом форвардного контакта могут выступать разные активы. Однако в мировой практике наиболее широкое развитие получил форвардный валютный рынок, и форвардные контракты активно используются для хеджирования валютного риска.

Пример 2. Импортер планирует через три месяца купить за границей товары. Ему нужна валюта. Чтобы не рисковать, он решает хеджировать покупку валюты трехмесячным форвардом на доллар США. Банки предлагают трехмесячные контракты по цене 1долл.=30 руб. Импортер покупает контракт по данной котировке, т. е. заключает с банком контракт, в рамках которого обязуется купить доллары. Проходит три месяца, импортер уплачивает по контракту 30 руб. за один доллар и получает контрактную сумму.

В этот момент конъюнктура на спотовом рынке может оказаться любой. Допустим, курс доллара составил 31 руб. Однако по контракту импортер получает доллар по 30 руб.

Пусть курс доллара равен через три месяца 29 руб., но импортер обязан выполнить условия сделки и купить доллар за 30 руб.

Таким образом, заключение форвардного контракта застраховало импортера от неблагоприятной конъюнктуры, но не позволило воспользоваться благоприятной ситуацией.

В данном примере возникает общая закономерность для срочных контрактов, а именно:

- если страхуются от роста цены базисного актива, то покупают контракт, т.е. гарантируют себе на будущее цену покупки;
- если страхуются от падения цены базисного актива, то продают контракт, т.е. гарантируют себе на будущее цену продажи.

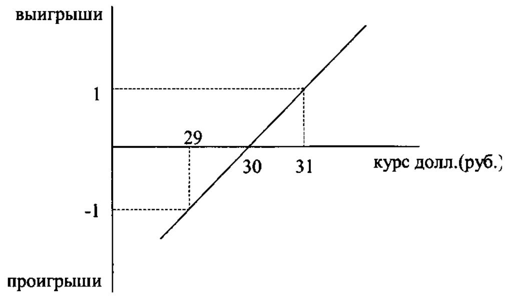
Несмотря на то, что форвардный контракт предполагает обязательность исполнения, контрагенты не застрахованы от его неисполнения в силу, например, банкротства или недобросовестности одного из участников сделки. Таким образом, для форвардного контракта характерен кредитный риск.

Форвардный контракт может заключаться с целью игры на разнице курсовой стоимости активов. Лицо, открывающее длинную позицию, рассчитывает на рост цены базисного актива, лицо, открывающее короткую позицию — на понижение его цены.

Пример 3. ***Игра на повышение***. Пусть в примере 2 вместо импортера фигурирует спекулянт. Он ожидает, что курс доллара через три месяца составит 31 руб. Поэтому спекулянт покупает контракт с котировкой 1долл.=30 руб.

Через три месяца курс доллара на спотовом рынке равен 31 руб. Спекулянт покупает доллар по контракту за 30 руб. и сразу продает его на спотовом рынке по 31 руб., выигрывая на одном долларе один рубль.

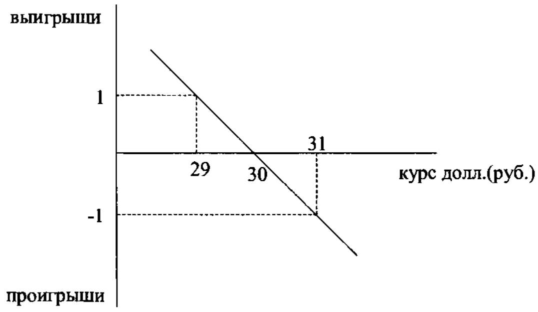
Если курс доллара к этому моменту упал до 29 руб., спекулянт проигрывает 1 руб. Он обязан исполнить форвардный контракт, т.е. купить доллар за 30 руб., а продать его может сейчас только за 29 руб.



Игра на повышение

На рис. по горизонтальной оси представлен курс доллара в рублях, по вертикальной — выигрыши-проигрыши спекулянта. Покупка контракта, как и любого другого актива, изображена восходящей линией под углом 45 градусов, чтобы в пропорции один к одному перенести на вертикальную ось результат изменения курса доллара.

Аналогично для игры на понижение.



Игра на понижение

Общая закономерность для срочных контрактов такова:

- если играют на повышение, то покупают контракт, выигрывают от роста цены и проигрывают от ее падения;
- если играют на понижение, то продают контракт, выигрывают от снижения цены и проигрывают от ее роста.

Валютные форвардные контракты, как правило, имеют стандартные сроки обращения. Обычно это 1,2,3,6,9 и 12 месяцев.

Цена поставки, форвардная цена и цена форвардного контракта

Цена поставки - это цена, по которой поставляется базисный актив по форвардному контракту. Она устанавливается в момент заключения контракта, фиксируется в контракте и поэтому остается неизменной в течение всего времени действия контракта.

Существует также понятие форвардной цены базисного актива. Это цена актива для определенного времени в будущем. Для каждого момента времени *форвардная цена* - это цена поставки форвардного контракта, который заключается в этот момент. Таким образом, форвардная цена изменяется со временем. На рынке в каждый момент времени для определенной даты в будущем существует форвардная цена базисного актива.

Цена форвардного контракта в момент его заключения равна нулю. Если в дальнейшем контракт продается на вторичном рынке, то он получает некоторую цену, поскольку возникает разница между ценой поставки и текущей форвардной ценой. Стоимость форвардного контракта, будучи равной нулю при его подписании, будет затем колебаться вместе с спот-ценой. Очевидно, эта величина увеличивается с ростом спот-цены и уменьшается с ее падением.

С точки зрения теории, в вопросе определения форвардной цены можно выделить две концепции. Первая состоит в том, что форвардная цена возникает как следствие будущих ожиданий участников срочного рынка относительно будущей цены спот. Участники экономических отношений пытаются учесть и проанализировать всю доступную им информацию относительно будущей конъюнктуры и определить будущую цену спот.

Вторая концепция строится на арбитражном подходе. Арбитражный подход строится на технической взаимосвязи между форвардной и текущей спотовой ценами, которая определяется существующей на рынке ставкой без риска. В его основе лежит положение о том, что инвестор, с точки зрения финансового решения, должен быть безразличен в вопросе приобретения базисного актива на спотовом рынке сейчас или по форвардному контракту в будущем.

Далее используются обозначения:

X – цена поставки,

F – форвардная цена,

f – цена форвардного контракта,

S – спотовая цена,

t – период действия контракта (оставшийся),

r – процентная ставка (годовая).

Определение форвардной цены и цены форвардного контракта

1) По базовому активу доход не выплачивается.

Теорема. Для форвардного контракта на базовый актив, по которому доход не предусматривается,

$$F = Se^{rt}.$$

Доказательство. Если $F > Se^{rt}$, то инвестор может занять сумму S на t лет, купить базовый актив и занять короткую позицию по форвардному контракту с ценой поставки F. При погашении актив продается за F, а сумма Se^{rt} используется для оплаты ссуды и приводит к арбитражной прибыли в размере $F - Se^{rt} > 0$. Если же $F < Se^{rt}$, то инвестор может занять короткую позицию по базовому активу, инвестировать выручку на t лет, и затем занять длинную позицию по форвардному контракту с ценой поставки F. При погашении актив покупается за F для закрытия короткой позиции и получения прибыли в размере $Se^{rt} - F$.

Пример. Новый 3-месячный контракт на 6-месячную бескупонную облигацию должен иметь цену поставки, равную $Se^{r/4}$, где r — ежегодная процентная ставка с ежеквартальным начислением процентов, а S — спот-цена облигации. Например, если r = 6% и S = 970,87, то цена поставки равна $970{,}87 \cdot e^{0{,}06/4} = 985{,}54$.

Стоимость форвардного контракта, по которому вплоть до момента погашения не возникает никакого дохода, должна равняться величине

$$f = S - Xe^{-rt} = (F - X)\, e^{-rt}.$$

В этом можно убедиться, рассматривая портфель из одного длинного форварда, суммы в наличных Xe^{-rt}, и одной короткой позиции по базовому активу. Наличные к моменту погашения превратятся в X и их можно будет использовать для оплаты поставки по форвардному контракту. Поставленный же актив закроет короткую позицию. Поскольку стоимость портфеля при погашении равна нулю, то и его настоящая стоимость должна быть равна 0.

Это – цена форвардного контракта для участника, занимающего длинную позицию. Для участника с короткой позицией цена контракта равна ($-f$).

Поскольку цена спот в последующем может как вырасти, так и упасть, то цена форвардного контракта может иметь как положительную, так и отрицательную цену. Причем, если для участника с длинной позицией цена положительная, то для участника с короткой позицией она отрицательная, и наоборот. Отрицательная цена для участника контракта означает: для того, чтобы освободиться от обязательств по форварду, ему необходимо уплатить данную сумму новому лицу, которое займет его позицию в контракте.

При дискретном начислении процентов формулы для F и f имеют соответственно вид:

$$F = S\left(1 + r\ \frac{t}{365}\right)$$

$$f = S - X / \left(1 + r\frac{t}{365}\right) = (F - X) / \left(1 + r\frac{t}{365}\right)$$

Пример. В момент заключения форвардного контракта цена спот акции равна 100 руб., процентная ставка 10%. Определить шестимесячную форвардную цену. Прошло три месяца. Цена спот акции к этому моменту выросла до 120 руб. Определить цену контракта.

Решение.

$$F = 100\left(1 + 0{,}1\frac{6}{12}\right) = 105\,руб.$$

$$f = 120 - 105 / (1+0{,}1(3/12)) = 17{,}56\ руб.$$

2) По базовому активу выплачивается предсказуемый доход.

Теорема. Для форвардного контракта на базовый актив, по которому предусматривается предсказуемый доход с настоящей стоимостью, равной I,

$$F = (S - I)e^{rt}.$$

Доказательство. Если $F > (S - I)\,e^{rt}$, то инвестор может занять сумму S на t лет, купить базовый актив и занять короткую позицию по форвардному контракту с ценой поставки F. При погашении актив продается за F и сумма $(S - I)\,e^{rt}$ используется для оплаты ссуды (поскольку недостающую часть предоставит доход $I\,e^{rt}$), оставляя арбитражную прибыль величины $F - (S - I)\,e^{rt} > 0$. Если же $F < (S - I)\,e^{rt}$, то инвестор может занять короткую позицию по базовому активу, инвестировать полученную выручку на t лет и занять длинную позицию по форвардному контракту с ценой поставки F. При погашении актив покупается за F для закрытия короткой позиции (при этом помимо возвращения самого актива следует оплатить и доход $I\,e^{rt}$ по нему) и получения прибыли в размере $(S - I)\,e^{rt} - F > 0$.

Стоимость форвардного контракта, по которому предполагается предсказуемый доход с настоящей стоимостью, равной I, составляет величину

$$f = (S - I) - Xe^{-rt}$$

Мы можем подтвердить это, рассматривая портфель из одного длинного форвардного контракта, суммы в наличных $Xe^{-rt} + I$, и одной короткой позиции по базовому активу. К моменту погашения сумма в наличных возрастет до X после оплаты дохода $I\,e^{rt}$ первому акционеру. Тем самым будет в наличии сумма, достаточная для оплаты поставки по форвардному контракту, после чего можно будет закрыть короткую позицию. Поскольку стоимость портфеля при погашении нулевая, то его стоимость должна быть равна нулю и в настоящий момент, т.е. $f - (S - I) + Xe^{-rt} = 0$.

При дискретном начислении процентов:

$$F = (S - I)\left(1 + r\ \frac{t}{365}\right)$$

Пример. Цена акции 100 руб., через четыре месяца на акцию выплачивается дивиденд в размере 10 руб. Определить шестимесячную форвардную цену акции, если процентная ставка на шесть месяцев равна 20% годовых, на четыре месяца 19,8% годовых.

Решение. Приведенная стоимость дивиденда к моменту заключения контракта равна:

$$I = \frac{10}{1+0{,}198(4/12)} = 9{,}38\,руб.$$

Шестимесячная форвардная цена акции составляет:

$$(100-9{,}38)\left(1+0{,}2\frac{6}{12}\right) = 99{,}68\,руб.$$

3) По базовому активу оплачивается непрерывная дивидендная доходность.

Непрерывная дивидендная доходность означает, что дивиденды выплачиваются непрерывно по ежегодной ставке q. Стоимость форвардного контракта в любой момент до погашения должна быть равна величине

$$f = Se^{-q\tau} - Xe^{-r\tau}.$$

В этом можно убедиться, рассматривая портфель из одного длинного форвардного контракта, суммы в наличных Xe^{-rt} и короткой позиции по e^{-qt} единицам базового актива. Все дивиденды будут оплачены за счет продажи дополнительных единиц базового актива. Поэтому к моменту погашения сумма в наличных возрастет до X и точно так же, из-за выплачиваемых дивидендов, короткая позиция возрастет до точно одной единицы базового актива. Но тем самым окажется достаточно средств для оплаты поставки по форвардному контракту, что позволит закрыть короткую позицию. Поскольку стоимость портфеля при погашении нулевая, то ее текущая стоимость также должно равняться нулю. Одним из следствий этого равенства является тот факт, что форвардная цена равна

$$F = Se^{(r-q)\tau}.$$

Во всех рассмотренных выше случаях выполняется следующее соотношение:

$$f = (F - X)\, e^{-rt}.$$

При дискретном начислении процентов :

$$F = S\left(1+r\,\frac{t}{365}\right) \Big/ \left(1+q\,\frac{t}{365}\right)$$

Ставку дивиденда можно вычислить, приравнивая выражения для F в этом и предыдущем случаях. В результате получается формула (в которой D – приведенная величина дивидендов):

$$q = \frac{D}{S-D}\frac{365}{t}.$$

Пример. Цена акции 100 руб., через четыре месяца на акцию выплачивается дивиденд в размере 10 руб. Процентная ставка на шесть месяцев равна 20% годовых, на четыре месяца 19,8% годовых. Рассчитать ставку дивиденда и шестимесячную форвардную цену акции.

Решение. Приведенная стоимость дивиденда равна

$$\frac{10}{1+0{,}198(4/12)} = 9{,}38\,руб.$$

$$q = \frac{9{,}38}{100-9{,}38}\cdot\frac{12}{4} = 0{,}310527 \text{ или } 31{,}05\%.$$

$$F = 100\frac{1+0{,}2(6/12)}{1+0{,}3105(4/12)} = 99{,}68\,руб.$$

4) Форвардные контракты на валюту (обменный курс)

Форвардные контракты предоставляют широкие возможности для защиты от валютного риска. Пусть S означает текущий обменный курс (спот-курс), а F — форвардный обменный курс на момент 1 год спустя (оба в терминах «местная за 1 иностранной»). И будем использовать символы i и r для обозначения ежегодной процентной ставки иностранной и местной валюты, соответственно. Обязательно возникнут арбитражные возможности, если вышеуказанные четыре числа не будут удовлетворять определенному соотношению, известному под названием паритет процентных ставок:

$$\frac{F}{S}=\frac{e^{r}}{e^{i}}=e^{r-i}$$

Вот объяснение. Владелец местной валюты может либо 1) предоставить деньги в кредит на местном рынке и получить год спустя в e^r раз большую сумму, либо 2) конвертировать на спот-рынке местную валюту в иностранную, предоставить ссуду на 1 год на иностранном рынке и затем конвертировать иностранную валюту в местную по фиксированному форвардному обменному курсу в будущем, *F*, покупая сейчас форвардный контракт на продажу иностранной валюты. Как это и принято, деньги из рук в руки при заключении форвардного контракта не переходят. Но в этом случае 1 денежная единица местной валюты через год превратится в Fe^i/S единиц. Тогда, если $Fe^i/S > e^r$, то арбитражная прибыль может возникнуть при займе на местном рынке и предоставлении кредита на иностранном. И, наоборот, если $Fe^i/S < e^r$, то арбитражную прибыль можно получить от заимствования на иностранном рынке и предоставления денег в кредит на местном. Отсюда заключаем, что $Fe^i/S = e^r$.

Если же начисление процентов периодическое, то так же легко проверить, что

$$\frac{F}{S}=\frac{1+r}{1+i}$$

Паритет процентных ставок говорит о том, что если местная процентная ставка выше иностранной, то валюта другой страны на форвардном рынке будет продаваться с премией. И наоборот, если местная процентная ставка меньше, то иностранная валюта на форвардном рынке будет продаваться со скидкой.

Для произвольного периода *t* формулы примут вид:

$$\frac{F}{S}=\frac{e^{rt}}{e^{it}}=\frac{1+rt}{1+it}$$

Пример. Курс доллара равен 30 руб., трехмесячная ставка по рублям 10%, по долларам 5%. Определить трехмесячный форвардный курс.

Он составляет:

$$F=30\frac{1+0{,}10(3/12)}{1+0{,}05(3/12)}=30{,}37\,руб.$$

5) Форвардная цена товара

Лицо, которое заинтересовано в будущем располагать некоторым товаром, имеет альтернативы: купить его сегодня на спотовом рынке или по форвардному контракту. Купив товар сегодня, чтобы потребить в будущем, инвестор несет расходы по его хранению и страхованию, а также не получает процент на сумму стоимости товара, которую он мог бы разместить на счете на период действия контракта. Если форвардная цена товара равна цене спот плюс расходы по хранению и страхованию и упущенный процент, то покупатель безразличен к приобретению товара на спотовом рынке или по форвардному контракту по данной цене. Если форвардная цена не соответствует данной сумме, то возникнет возможность совершения арбитражной операции. В результате действий арбитражеров указанное равенство восстановится. Поэтому форвардную цену товара можно представить следующей формулой:

$$F=Se^{(r+z)T},$$

где z - непрерывно начисляемый процент (в расчете на год) от стоимости товара, уплачиваемый за хранение и страхование.

При дискретном начислении процентов:

$$F=S\left(1+r\frac{T}{365}\right)+Z,$$

где Z - расходы по хранению и страхованию товара за период T.

Пример. Цена спот пшеницы равна 4000 руб. за тонну, ставка на 90 дней - 8% годовых, расходы по хранению и страхованию за этот период составляют 6,5 руб. Определить 90-дневную форвардную цену пшеницы. Считать, что финансовый год равен 360 дням.

Решение. Форвардная цена равна

$$4000\left(1+0{,}08\frac{90}{360}\right)+6{,}5=4086{,}5\,руб.$$

Фактическая форвардная цена товара может оказаться ниже теоретической. Это говорит о том, что владельцы товара получают полезность от владения им. Данную полезность можно оценить с помощью ставки полезности *y*. Тогда уравнение для форвардной цены примет вид:

$$Fe^{yT} = Se^{(r+z)T}.$$

откуда

$$F = Se^{(r+z-y)T}$$

Эти уравнения показывают, что форвардная цена будет меньше при росте ставки полезности, и наоборот. Ставка полезности отражает ожидания участников рынка в отношении будущего наличия товара. Небольшое значение *y* говорит о том, что участники рынка не ожидают дефицитности товара в будущем. Наличие большого количества товара уменьшает степень полезности его единицы для потребителя. Большое значение *y* свидетельствует о дефицитности товара. Соответственно полезность единицы товара для потребителя возрастает. Таким образом, небольшое значение *y* прежде всего говорит о наличии значительных запасов товара у потребителей.

Форвардная цена товара, казалось бы, должна быть больше текущей цены слот. Однако на практике форвардная цена часто оказывается ниже спотовой. Существуют разные гипотезы, которые пытаются объяснить это рядом факторов. При падении фактической форвардной цены ниже теоретической арбитраж затруднен. Арбитражеры вряд ли смогут занять товар для продажи его на спотовом рынке, так как он необходим владельцам для текущего потребления. Поэтому форвардная цена может упасть довольно низко, особенно, если на рынке наблюдается дефицит товара в настоящий момент времени. Кроме того, значительный рост цены товара в настоящий момент скорее всего вызовет увеличение его выпуска в будущем. В свою очередь, при такой конъюнктуре часть потребителей данного товара может пересмотреть свои планы по его будущим закупкам в сторону уменьшения. В совокупности оба эффекта в тенденции могут вызвать понижение форвардной цены.

Обычно форвардная цена бывает ниже спотовой на рынках товаров, которые сразу потребляются по мере их производства и являются дорогостоящими в хранении.

б) Форвардная цена при различии ставок по кредитам и депозитам.

При рассмотрении вопроса определения форвардной цены мы исходили из предположения о том, что ставки по кредитам и депозитам одинаковы. Данный прием позволил представить технику расчета форвардной цены на основе безарбитражного подхода. Были получены формулы для определения теоретической форвардной цены. Было показано, что при расхождении между фактической и теоретической форвардными ценами можно заработать арбитражную прибыль. Поскольку ставки по кредитам и депозитам были равны, то возникала единственная теоретическая форвардная цена, относительно которой рассматривались возможности совершения арбитражной операции. На практике ставки по кредитам выше, чем по депозитам. Поэтому для определения возможности совершить арбитражную операцию необходимо рассчитать две форвардные цены — верхнюю ($F_В$) на основе ставки по кредиту и нижнюю ($F_Н$) — на основе ставки по депозиту. Если фактическая форвардная цена ($F_ф$) выше верхней теоретической цены или ниже нижней теоретической цены, то существует арбитражная ситуация. Когда фактическая цена находится в диапазоне между теоретическими ценами, то арбитраж невозможен.

Пример. Курс акции 100 руб. Ставка без риска по депозиту равна 10%, по кредиту - 15%. Дивиденды по акции не выплачиваются. Определить верхнюю и нижнюю теоретические шестимесячные форвардные цены.

Решение. Форвардная цена акции, по которой не выплачиваются дивиденды, для простого процента рассчитывается по формуле (2.1). Определяем верхнюю теоретическую границу на основе ставки по кредиту:

$$F_в = 100\left(1 + 0{,}15\frac{6}{12}\right) = 107{,}5\,руб.$$

Определяем нижнюю теоретическую границу на основе ставки по депозиту:

$$F_н = 100\left(1 + 0{,}1\frac{6}{12}\right) = 105\,руб.$$

Если форвардная цена акции в примере

$$105\,руб. \le F_ф \le 107{,}5\,руб.,$$

арбитраж невозможен. Фактический уровень цены в рамках этого диапазона будет определяться соотношением спроса и предложения на рынке. Если спрос больше предложения, цена приблизится к верхней границе. Если предложение больше, то к нижней границе.

При $F_ф < 105$руб. последует арбитраж. Инвестор: а) купит более дешевый форвард; б) займет акцию, продаст ее и разместит полученные средства на безрисковом депозите на шесть месяцев под 10%.

При $F_ф > 110$руб. инвестор: а) продаст более дорогой форвард; б) займет 100 руб. под 15% годовых на полгода и купит акцию.

5. Фьючерсные контракты

Общая характеристика фьючерсных контрактов

Фьючерсный контракт - это соглашение между сторонами о будущей поставке базисного актива, которое заключается на бирже. Исполнение фьючерсного контракта гарантируется клиринговой палаты биржи. *Клиринговая* (или расчетная) *палата* берёт на себя функции организатора исполнения сделок: осуществляет расчеты между участниками биржевых сделок на основе зачета взаимных требований и т.д. После того как контракт заключен, он регистрируется в клиринговой палате. С этого момента стороной сделки как для продавца, так и для покупателя становится клиринговая палата, т. е. для покупателя она выступает продавцом, а для продавца — покупателем. Поскольку фьючерсные контракты стандартны и гарантированы клиринговой палатой, они высоко ликвидны. Это значит, что участник сделки легко может закрыть открытую позицию с помощью офсетной сделки. *Офсетная сделка* представляет собой сделку, в результате которой прекращаются обязанности по ранее открытой позиции в связи с тем, что возникает противоположная позиции по одному и тому же контракту. Результатом его операции будет выигрыш или проигрыш в зависимости от того, по какой цене он открыл и закрыл позицию.

Именуются контракты по месяцу их истечения. Например, мартовский фьючерс. Это означает, что контракт истекает в марте. Фьючерсные контракты обычно являются краткосрочными. С момента, когда биржа открывает торговлю контрактом, и до момента его истечения, как правило, проходит девять месяцев. Однако существуют и долгосрочные фьючерсы, срок действия которых насчитывает несколько лет. В мировой практике котировка фьючерсного контракта дается в расчете на единицу базисного актива.

Фьючерсные контракты отличаются от *форвардных* несколькими чертами. Прежде всего, ими торгуют скорее на центральных биржах, чем на внебиржевом рынке, что приводит к более эффективному и точному определению цены. Во-вторых, учреждение клиринговой палаты означает, что продавцы и покупатели не смотрят в глаза друг другу. Кредитный риск, который присущ форвардным контрактам, минимизируется. В-третьих, фьючерсные контракты являются весьма стандартизованными инструментами. В них точно указывается, поставка какого товара и в каком количестве, причем удовлетворяющего определенным стандартам качества, должна произойти в заранее определенном месте и в определенный момент времени. Все это резко контрастирует с форвардными контрактами, единственным условием которых является обоюдное соглашение. Наконец, выигрыши и потери фьючерсных контрактов ежедневно отмечаются на рынке. Поэтому оценки корректируются в конце каждого торгового дня, исходя из цены сделки, чтобы лучше отражать выигрыши или потери инвесторов. Цена же сделки определяется как среднее цен, по которым контракты заключаются непосредственно перед тем, как закроется биржа.

Объем контракта, или просто объем фьючерсного контракта — это просто количество базового актива, которое должно быть поставлено по контракту. Если участник контракта желает осуществить или принять поставку, он не ликвидирует свою позицию до дня поставки. В этом случае клиринговая палата уведомляет его, кому он должен поставить или от кого принять базисный актив. Но может предусматриваться не поставка базисного актива, а взаиморасчеты между участниками в денежной форме. Тогда клиринговая палата просто вычеркивает компенсирующие позиции из своего списка. Большая часть фьючерсных контрактов закрываются именно таким образом, а не поставкой базового актива. И наоборот, форвардные контракты предназначены для поставки.

Например, фьючерс на золото имеет стандартный поставочный контракт, который составляет 100 (+5%) тройских унций (около 3,1 кг) золота пробы не менее чем 0,995 в одном или в трех слитках по одному килограмму, имеющих серийный номер и идентификационный штамп аффинажного предприятия. Цена указывается за 1 тройскую унцию. Месяцы контракта: февраль, апрель, июнь, август, октябрь, декабрь. Торги по контракту завершаются в третий рабочий день от конца месяца, предшествующего поставке.

Товар	Месяц	Последн.	Осн.	Макс.	Мин.	Изм.	Изм. %	Время
Золото	Dec 13	1.315,90	1.323,70	1.327,30	1.305,80	-7,80	-0,59%	02/11
Серебро	Dec 13	21,880	21,867	21,995	21,710	0,013	0,06%	02/11
Медь	Dec 13	3,300	3,301	3,326	3,291	-0,001	-0,02%	02/11
Платина	Jan 14	1.455,20	1.448,40	1.458,85	1.446,15	6,80	0,47%	02/11
Палладий	Dec 13	740,50	736,80	742,00	732,80	3,70	0,50%	02/11
Сырая нефть	Dec 13	94,62	96,38	96,65	94,39	-1,77	-1,83%	02/11
Нефть Сырец	Dec 13	105,88	108,84	109,35	105,79	-2,97	-2,72%	02/11
Природ. Газ	Dec 13	3,519	3,581	3,578	3,511	-0,062	-1,73%	02/11
Мазут	Dec 13	2,8833	2,9539	2,9692	2,8779	-0,0706	-2,39%	02/11
Нефть Газ Лондон	Nov 13	910,50	933,63	938,63	909,13	-23,13	-2,48%	02/11

Существуют две основные цели заключения фьючерсных контрактов: хеджирование и спекуляция. *Хеджеры* покупают и продают фьючерсы, чтобы исключить рискованную позицию на текущем рынке. В ходе обычного бизнеса они или продают, или производят базисный актив. *Спекулянты* покупают и продают фьючерсы только с целью получения выигрыша, закрывая свои позиции по лучшей цене по сравнению с первоначальной.

При торговле фьючерсами клиринговая палата предъявляет ряд требований.

1) Открывая позицию, каждый инвестор обязан открыть фьючерсный счет в брокерской компании и внести на него некоторую сумму денег в виде залога. Эта сумма называется *начальной маржей,* счет - *маржевым счетом*. Обычно устанавливается *нижний предел маржи*, ниже которого не должны опускаться остатки средств на счете клиента.

2) В конце каждого торгового дня по результатам фьючерсных сделок биржа производит перерасчет позиций инвесторов, т.е. определяет выигрыш или проигрыш сторон. Сумма, вносимая на маржевый счет (списываемая с него), называется *переменной (вариационной) маржей*. Процедура изменения суммы на счете инвестора с целью отражения изменения котировочной цены фьючерсного контракта называется *клирингом*. Клиринговая палата ежедневно заменяет существующий фьючерсный контракт на новый, цена покупки которого равна котировочной цене.

В целом сумма на счете или покупателя, или продавца составляется из двух величин:

- первоначальной маржи;
- суммы ежедневных выигрышей за вычетом проигрышей по открытым фьючерсным позициям.

Так как величина выигрышей (минус потери) каждый день меняется, то каждый день меняется и сумма на счете.

Пример взаиморасчетов и клиринга по фьючерсным контрактам представлен в таблице.

Показатели	***Открытие позиции***	***Дни торговли***		
		1	2	3
1. Фьючерсная цена	1500	1520	1530	1550
2. Минимальный уровень маржи	70	70	70	70
Позиция покупателя:				
маржевый счет	100	120	130	150
переменная маржа		+20	+10	+20
накопленный выигрыш/проигрыш		+20	+30	+50
Позиция продавца:				
маржевый счет	100	80	70	50
переменная маржа		-20	-10	-20
накопленный выигрыш/проигрыш		-20	-30	-50

В конце условного дня "0" контрагенты заключают контракт на поставку товара А по цене 1500. Обе стороны внесли на маржевый счет начальную маржу - 100 руб.

В конце первого дня фьючерсная цена поднялась до 1520 руб. В этой ситуации в выигрыше оказался покупатель. Сумма выигрыша равна 20 руб. и переводится со счета продавца на счет покупателя.

Во второй день торговли фьючерсная цена выросла еще на 10 руб. и составила 1530 руб. Клиринговая палата списывает 10 руб. со счета продавца на счет покупателя.

В третий день фьючерсная цена возросла еще на 20 руб. К концу третьего дня на маржевом счете продавца остатки средств достигли предела, и брокер извещает продавца о необходимости внести 20 руб. для достижения остатком на счете минимально необходимого уровня.

Если предположить, что в конце третьего дня стороны закрыли свои позиции, то покупатель получает выигрыш 50 руб., затратив 100 руб. (доходность составила 50% за три дня торгов).

Фьючерсный денежный поток

Рассмотрим фьючерсный контракт с n днями до погашения. Пусть F_i означает цену фьючерса в конце дня i при $0 \le i \le n$. Тогда денежная выплата по контракту на день i равна $F_i - F_{i-1}$ как следствие ежедневного урегулирования. Поэтому чистый денежный поток в течение срока жизни контракта (фьючерсный денежный поток) можно представить в виде

$$(F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \ldots + (F_n - F_{n-1}) = F_n - F_0 = S_T - F_0.$$

Напомним, что F_n равно спот-цене при погашении, S_T. Но, хотя суммарная выплата по фьючерсному контракту $S_T - F_0$ и совпадает с выплатой по форвардному контракту, реальная стоимость выплат может отличаться, поскольку ежедневные выплаты по фьючерсному контракту могут инвестироваться и, кроме того, их стоимость зависит от того, как слагаемые суммы $S_T - F_0$ разбросаны на n-дневном промежутке времени. По форвардным же контрактам никаких сумм до окончательного урегулирования не выплачивается.

Фьючерсная цена

Теорема. Если процентные ставки не являются стохастическими, фьючерсная цена совпадает с форвардной.

Доказательство. Рассмотрим форвардный и фьючерсный контракты на один и тот же базовый актив с n днями до погашения. Предположим, что процентная ставка дня i есть r_i, т.е. стоимость \$1 в начале дня i возрастает до величины $R_i = e^{r_i}$ к его концу. Пусть F_i — цена фьючерса в конце дня i. Заметим, что \$1, вложенный в n-дневную дисконтную облигацию в конце дня 0, будет стоить $R = \prod_{j=1}^{n} R_j$ долларов в конце дня n.

Начиная со дня 1, будем занимать $\prod_{j=1}^{i} R_j$ длинных позиций по фьючерсу в конце дня $i - 1$ и вкладывать получаемые суммы в конце дня i в безрисковые облигации, погашаемые в день n, т.е. в момент поставки. Денежная сумма, возникающая от этих позиций на день i равна $(F_i - F_{i-1}) \prod_{j=1}^{i} R_j$, поскольку день i начинается с $\prod_{j=1}^{i} R_j$ контрактов. И на нее вплоть до дня n будут начисляться проценты, увеличивая ее до суммы

$$(F_i - F_{i-1}) \prod_{j=1}^{i} R_j \prod_{j=i+1}^{n} R_j = (F_i - F_{i-1}) \prod_{j=1}^{n} R_j = (F_i - F_{i-1})R.$$

Следовательно, стоимость денежного потока к концу дня n будет равна

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - F_{i-1})R = (F_n - F_0)R = (S_T - F_0)R.$$

Причем заметим, что никаких капиталовложений для реализации этой стратегии не потребовалось.

Предположим далее, что форвардная цена f_0 превосходит фьючерсную цену F_0. Тогда мы сможем занять короткую позицию по R форвардным контрактам, занять сумму $f_0 - F_0$ и реализовать вышеупомянутую стратегию. Исходная сумма тогда будет равна $f_0 - F_0 > 0$. К концу дня n долг возрастет до $(f_0 - F_0)R$, а чистая стоимость от предпринятых действий окажется равной

$$f_0 R - S_T R - (f_0 - F_0)R + (S_T - F_0)R = 0.$$

Следовательно, сумма $f_0 - F_0 > 0$ представляет собой чистую арбитражную прибыль. Случай, когда $f_0 < F_0$, рассматривается аналогично. Это завершает доказательство.

При стохастических процентных ставках стоимости форвардов и фьючерсов теоретически уже не одинаковы. В действительности этот факт и является основной причиной разницы в цене у форвардов и фьючерсов на форексных рынках. Однако для краткосрочных контрактов, разница оказывается маленькой. Более того, разница значительна лишь по долгосрочным контрактам по активам, чувствительным к процентной ставке.

Фьючерсы на индексы акций

Индексный фьючерс, или *фьючерс на индексы акций* — это контракт, который заключается на значение какого-либо индекса, рассчитываемого на фондовом рынке. То есть базисным активом являются не акции, а индекс.

Фондовый индекс — составной показатель изменения цен определённой группы ценных бумаг — «индексной корзины». Как правило, абсолютные значения индексов не важны. Большее значение имеют изменения индекса с течением времени, поскольку они позволяют судить об общем направлении движения рынка. Рассчитываются индексы как среднее (средневзвешенное) арифметическое или среднее (средневзвешенное) геометрическое цен всех активов, входящих в индекс.

Сделку с фьючерсом на индекс можно трактовать как сделку на пакет ценных бумаг, входящих в расчет индекса. Фьючерсы на индексы — расчетные, поэтому никакой физической поставки ценных бумаг не осуществляется. Котировки индексных фьючерсов выражаются не в денежных единицах, как фьючерсы на акции, а в пунктах (как и сам индекс). Контракты, открытые на последний день торговли, автоматически закрываются совершением офсетной сделки.

Индексные фьючерсы используются как для спекуляций на значениях индекса, так и для хеджирования ценных бумаг, входящих в состав индекса. Из наиболее известных индексных фьючерсов:

S&P 500 (Standard & Poor's), FT-SE 100 (Financial Times), DAX (Deutscher Aktien IndeX), CAC 40 (Cotation Assistée en Continu).

Индексы можно рассматривать как ценные бумаги, по которым выплачиваются дивиденды, причем под ценными бумагами понимается корзина акций, составляющих индекс, а в роли дивидендов оказываются выплачиваемые по ним дивиденды. И если у индекса широкая база, то можно считать, что дивиденды выплачиваются непрерывно. Тогда, если через q обозначить усредненную ежегодную дивидендную доходность для всей жизни контракта, то цена фьючерса оказывается равной

$$F = Se^{(r-q)\tau}.$$

Для индексов, дивиденды по акциям которого стремятся оплачивать одновременно, можно рассчитать как размер дивидендов, так и моменты выплат. Тогда индекс превращается в ценную бумагу с известным доходом и в соответствии с равенством для форвардной цены стоимость такого фьючерса равна

$$F = (S - I)e^{rt}.$$

6. Опционы

Общая характеристика опционных контрактов

Опцион — это срочный контракт, который дает право своему владельцу (держателю) купить или продать некоторый базовый актив; право не является обязанностью, поэтому держатель опциона может отказаться от исполнения сделки.

В контракте участвуют два лица. Одно лицо покупает опцион, т. е. приобретает право выбора исполнить или не исполнить контракт. Другое лицо продает или, как говорят, *выписывает* опцион, т. е. предоставляет право выбора. Покупатель опциона уплачивает продавцу вознаграждение, называемое *премией*. Премия уплачивается в момент заключения контракта. Продавец опциона обязан исполнить свои контрактные обязательства, если покупатель (держатель) опциона решает его исполнить. Если покупатель не исполняет опцион, то контракт истекает для продавца без наступления обязательств. Покупатель имеет право исполнить опцион, т. е. купить или продать базисный актив по цене, которая указана в контракте. Она называется ценой исполнения.

Существует два основных типа опционов: колл и пут. Термин «опцион колл» (Call option) означают право покупки, а «опцион пут» (Put option) — право продажи базового актива,. Более сложные инструменты могут быть представлены в виде пакетов из них. ***Опцион колл*** дает своему владельцу право купить определенное количество базового актива по заранее фиксированной цене исполнения (цене покупки). ***Опцион пут*** дает его держателю право продать определенное количество базового актива по фиксированной цене продажи. В роли базового актива могут выступать акции, индексы акций, опционы, иностранная валюта, фьючерсные контракты, процентные ставки, ценные бумаги фиксированной доходности, зимняя температура и бесконечно много других.

Когда исполняется опцион колл, его владелец платит продавцу, скажем, цену исполнения в обмен на акцию, и опцион прекращает свое существование. Когда исполняется опцион пут, его владелец получает от выписывающей стороны цену исполнения в обмен на акцию и опцион также прекращает свое существование. Но опцион может быть исполнен и раньше намеченной даты исполнения, и такое исполнение будет называться досрочным. Кроме того, опцион может быть продан в любой удобный для осуществления сделки момент до окончания срока его действия.

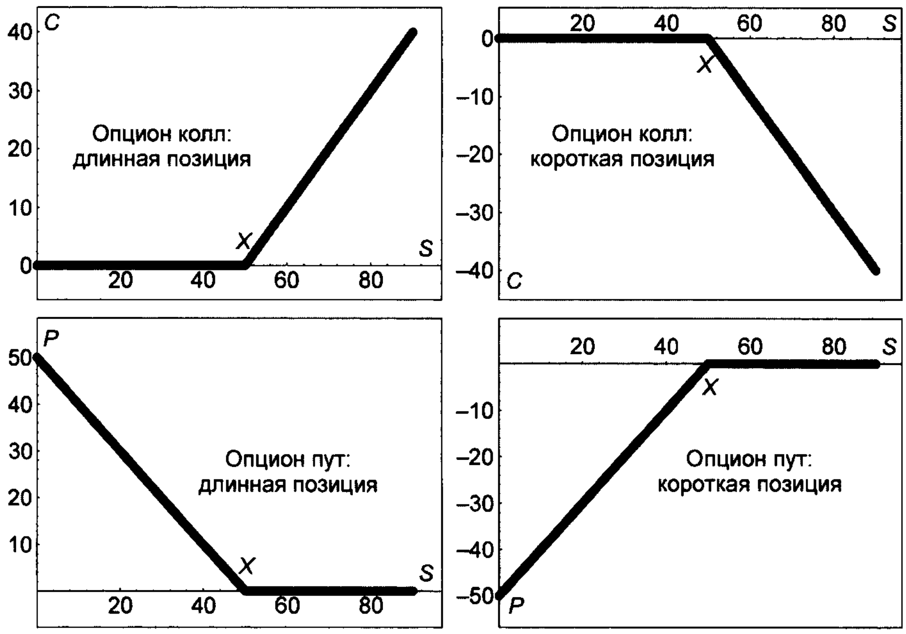
С точки зрения сроков исполнения контрактов опционы подразделяются на несколько типов; основные из них: американские и европейские. *Американский* опцион можно исполнить в любой день до истечения срока действия контракта, *европейский* — только в день истечения контракта.

Далее используются обозначения:

C обозначает стоимость опциона колл,
P — цену опциона пут,
X — цену исполнения,
S — цену акции,
D — величину дивидендов,
П3(x) или PV(x) обозначает приведенную стоимость денежной суммы x.

Основные понятия, связанные с опционами

Владельца опциона никто не заставляет использовать свое право. И опцион исполняется только тогда, когда это ему выгодно. Очевидно, опцион колл будет исполнен лишь в том случае, когда текущая цена акции окажется выше цены исполнения. И аналогично, опцион пут будет исполнен лишь в противном случае, т. е. если текущая цена акции будет меньше цены исполнения опциона. Поэтому *стоимость опциона* или *выплата* по нему в момент исполнения для опциона колл равна $C = \max(0, S-X)$, а для опциона пут равна $P = \max(0, X-S)$. На рисунках ниже построены графики зависимости выплат по опциону колл C или пут P в момент его исполнения от цены акции S в этот момент при цене исполнения $X = 50$.



Выплата никак не связана с первоначальной ценой. Величину $\max(0, S_t - X)$ называют *внутренней стоимостью* опциона колл, а величину $\max(0, X - S_t)$ — внутренней стоимостью опциона пут; здесь t — произвольный момент времени до окончания срока действия финансового инструмента. Часть стоимости опциона, которая превышает внутреннюю стоимость, называется его *временной стоимостью* и отражает возможность опциону стать более ценным до истечения срока его действия. Таким образом, *премия по опциону* состоит из внутренней стоимости и временной стоимости. Говорят, что опцион колл

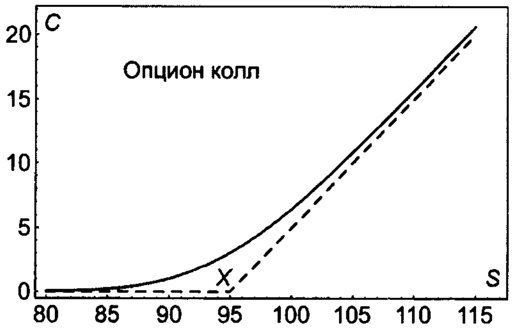
с выигрышем или *в деньгах*, если S > X,
при своих или *около денег*, если S = X и, наконец,
с проигрышем или *вне денег*, если S < X.

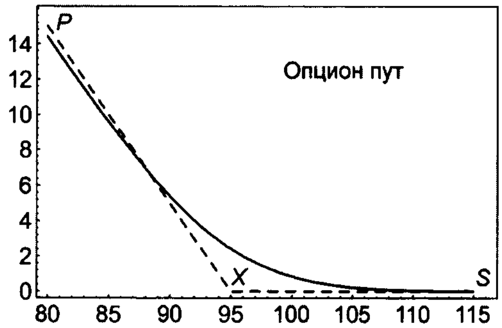
Аналогично, в отношении опциона пут говорят, что он

с выигрышем, если S < X,
при своих, если S = X и, наконец,
с проигрышем, если S > X.

Опционы, которые оказываются с выигрышем в момент окончания срока их действия, имеет смысл исполнять. Поразительно, но свыше 10% владельцев опционов с выигрышем все-таки не используют свое право. Хотя заключительная выплата по опциону и очевидна, но определение его стоимости в произвольный момент времени до окончания срока его действия представляет собой большое интеллектуальное достижение.

На рисунке ниже изображен общий вид кривых стоимости опционов колл C и пут P как функций от текущей цены акции S в некоторый момент до окончания срока их действия (сплошная линия). Пунктирная линия представляет стоимость опциона (т. е. выплату по нему) в момент истечения этого срока. Цена исполнения X = 95.





Опционами торгуют на биржевых и на внебиржевых рынках. Для опционов, торгуемых на биржах, стандартизируются условия опционных контрактов, создаются централизованные средства торговли и распространения ценовой информации, организуются опционные клиринговые палаты, т.е. многое из того, что присуще фьючерсам.

Основные стратегии в опционах

Опционные стратегии включают в себя занятие позиции по опциону, по базовому активу, а также заем или кредитование. Возможны шесть позиций: длинная и короткая позиции по акции, длинная и короткая позиции по опционам колл и пут. Длинная позиция открывается при покупке, короткая позиция – при продаже.

Стратегия может быть также *бычьей*, *медвежьей* или *нейтральной* по отношению к перспективам рынка. Дилер называется «быком» (bull), если он считает, что цены будут подниматься, и «медведем» (bear) — если он ожидает их падения.

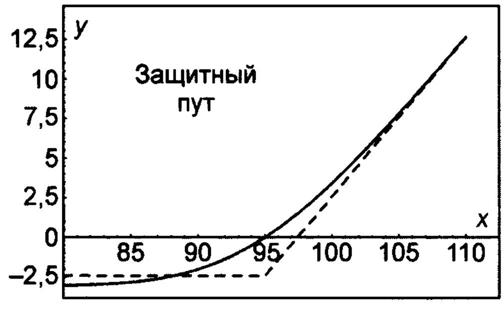
Стратегия может быть *агрессивной*, *защитной* или фактически *безрисковой* в терминах отношения к риску. Стратегия называется агрессивной или наступательной, если коэффициент бета риска используемого в ней актива больше единицы, и защитной или оборонительной — если он меньше единицы.

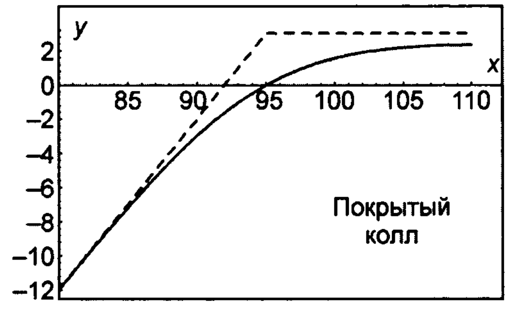
Например, покупка акции представляет собой бычью и агрессивную стратегию, поскольку первое означает, что инвестор получит прибыль в случае роста цены акции, а второе (агрессивность) связано с тем, что инвестор подвергнет себя риску максимальных потерь, если цена акции пойдет вниз. Еще более агрессивной стратегией является покупка опционов. В этом случае можно выиграть или потерять не 10% вложенных денег, что обычно для акции, а, например, все 100%.

В обеспеченной (или покрытой) позиции одни ЦБ защищают доходность других ЦБ. Существует три основных типа обеспеченных позиций: *хедж*, *спрэд* и *комбинация*.

1) *Хедж*

Стратегия, называемая хедж, совмещает использование опциона и его базового актива таким образом, чтобы один из них защищал другого от потерь. Хедж, который комбинирует длинную позицию по акции с длинным опционом пут, называется *защитный пут*. Хедж, который использует длинную позицию по акции с коротким опционом колл, называется *покрытый колл*.





На рисунке изображены графики зависимости прибыли *y* защитного пута и покрытого колла от цены акции *x*. Как цена исполнения, так и текущая цена акции равны $95. Пунктирные линии представляют позиционную прибыль в конце срока действия опциона.

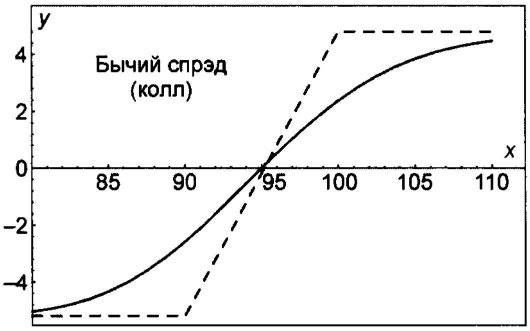
Покрытый колл является опционной стратегией, которая чаще всего используется инвесторами для получения сверхприбыли на спокойном рынке. Поскольку обе стратегии приводят к выигрышу лишь в случае повышения цен на акцию, то с точки зрения ситуации на рынке они являются бычьими. Но они также являются защитными: инвестор либо останется владельцем акции, либо получит за нее гарантированную цену в покрытом колле, а защитный пут гарантирует минимальную стоимость портфелю.

Есть и другие виды хеджа. Один из них, *обратный хедж* — это хедж с противоположным действием, например, такой, при котором занимается короткая позиция по акции в комбинации с коротким опционом пут или длинным опционом колл.

2) *Спрэд*

Стратегия *спрэд* состоит из нескольких опционов одного типа и по одному и тому же базовому активу, но с различными ценами исполнения или датами истечения. Эти стратегии представляют большой интерес для опционных дилеров. Будем использовать обозначения X_L, X_M, X_H для цен исполнения, удовлетворяющих неравенствам $X_L < X_M < X_H$.

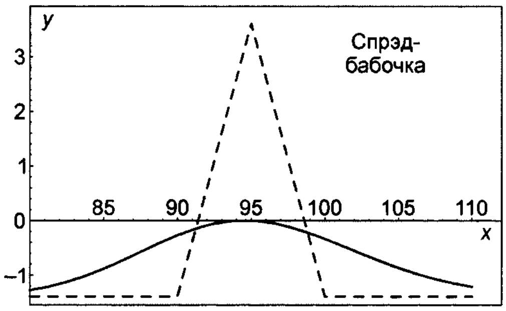
Бычий спрэд-колл состоит из длинного X_L опциона колл и короткого X_H опциона колл с одинаковой датой истечения. Начальным капиталовложением является величина $C_L - C_H$. Максимально возможная прибыль равна $(X_H-X_L) - (C_L-C_H)$, а максимум потерь C_H-C_L. Отношение к риску защитное. Этот спрэд известен также под названиями *ценовой спрэд, денежный спрэд* или *вертикальный спрэд*. На рисунке изображена диаграмма прибыли на момент окончания срока действия (пунктирная линия) опциона и за 1 месяц до него (сплошная линия).



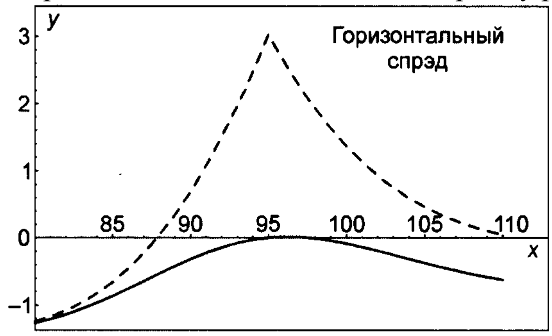
Выписывая X_H опцион пут и покупая X_L опцион пут с одинаковыми датами истечения, мы создадим так называемый *бычий спрэд пут*. *Медвежий спрэд* сводится к продаже бычьего спрэда и выгадывает при падении цен на акции.

Пример. Инвестор купил опцион колл. Затем ситуация на рынке стала меняться в его пользу и он смог продать этот опцион за ту же цену, но с более высокой ценой исполнения. Тем самым он использовал стратегию бычий спрэд, терминальная выплата по которой не может оказаться отрицательной, поскольку $C_L = C_H$.

Три опциона колл или три опциона пут с разными ценами исполнения и одной датой истечения срока образуют *спрэд-бабочку*. Более точно такой спрэд состоит из одного длинного X_L опциона колл, одного длинного X_H опциона колл и двух коротких X_M опционов колл. Первые два колла образуют крылья. Положительная сумма по ней выплачивается в момент исполнения только в случае, когда цена актива оказывается между X_L и X_H. Таким образом, спрэд-бабочка при малой величине $X_H - X_L$ хорошо приближает условно постоянное требование, по которому $1 выплачивается лишь тогда, когда угадывается конкретная цена.

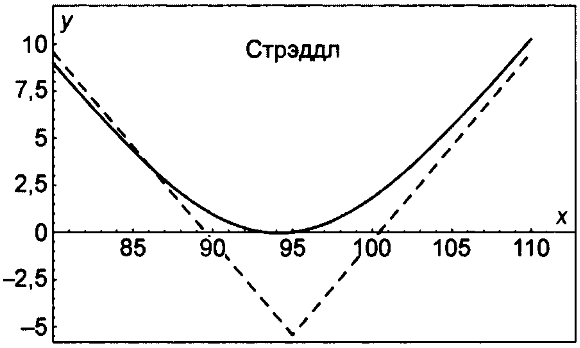


Горизонтальный спрэд (называемый также *временным спрэдом* или *календарным спрэдом*) включает в себя два опциона с одной и той же ценой исполнения, но разными датами истечения срока. Типичным образцом такого спрэда является спрэд, состоящий из длинного опциона колл с далекой датой истечения и короткого опциона колл с близкой. Источник прибыли для него связан с разной скоростью убывания промежутков времени до моментов истечения срока у разных опционов колл.



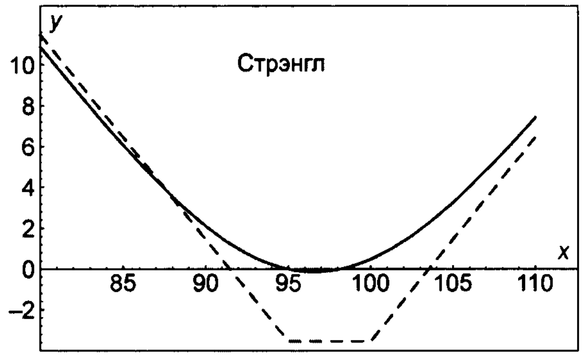
3) *Комбинация*

Комбинация состоит из опционов различного типа по одному и тому же базовому активу, причем все опционы либо куплены, либо выписаны (проданы). *Стрэддл* порождается длинным опционом колл и длинным опционом пут с одной ценой и той же датой истечения срока. Стрэддл мало реагирует на любое заранее выбранное направление изменения цен и его характеризует ограниченный риск. Но, поскольку ему выгодна большая волатильность цен, то лицо, покупающее стрэддл, называют *удлиняющим волатильность*.



Продажа стрэддла, наоборот, приводит к успеху при низкой волатильности с максимально возможной прибылью в C + P.

Стрэнгл отличается от стрэддла лишь тем, что цена исполнения опциона колл выше, чем опциона пут. Поэтому диаграмма прибыли для стрэнгла не симметрична в отличие от диаграммы для стрэддла.



Стрип состоит из длинного опциона колл и двух длинных опционов пут с одинаковыми ценами исполнения и датами истечения срока. *Стрэп* состоит из длинного опциона пут и двух длинных опционов колл также с одинаковыми ценами исполнения и датами истечения. Диаграммы прибыли в этих стратегиях очень напоминают ситуацию стрэддла, за исключением того, что они не симметричны относительно цены исполнения. Поэтому, хотя стрипы и стрэпы также выигрывают от большей волатильности цен, но все-таки одно из направлений движения цен для них считается предпочтительнее другого.

7. Арбитраж при оценке стоимости опциона

Арбитражные соображения

Принцип отсутствия арбитража утверждает, что бесплатного обеда не должно быть. Каким бы простым этот принцип ни был, но он играет весьма существенную роль в оценке стоимости опциона.

Безрисковая арбитражная возможность характеризуется тем, что при ней без всяких начальных капиталовложений и при любых обстоятельствах возникает неотрицательный доход, а в некоторых случаях положительный. На эффективном рынке такие возможности не должны существовать. Связанный с ним принцип доминирования портфеля гласит, что портфель A должен быть более ценным, чем портфель B, если выплата по A не менее хороша при всех обстоятельствах и лучше при некоторых.

Простое следствие принципа отсутствия арбитража состоит в том, что портфель, приносящий нулевой доход при любом развитии событий должен иметь нулевое приведенное значение (ПЗ). Любое другое значение приведет к арбитражным возможностям, которые можно будет реализовать с помощью короткой позиции по портфелю, если это значение будет положительным, или покупая этот портфель, если ПЗ будет отрицательным.

Так, Американский опцион не может стоить меньше своей внутренней стоимости, поскольку в противном случае можно купить опцион, быстро его исполнить и затем продать акцию с прибылью. С другой стороны, любой опцион пут, как и любой опцион колл, должен иметь неотрицательную стоимость, поскольку иначе его можно купить не затратив, а получив положительную сумму сейчас и закончить операцию с неотрицательной суммой при истечении срока.

Если два опциона колл отличаются только ценами исполнения, то опцион с более низкой ценой исполнения должен стоить не меньше опциона с более высокой ценой исполнения, иначе можно получить арбитражную прибыль.

Пример. Имеется два трехмесячных европейских опциона колл на акцию A с ценами исполнения 100 руб. и 105 руб. Первый стоит 5 руб., второй 8 руб. Отмеченное выше условие нарушено, поэтому арбитражер продает второй опцион за 8 руб. и покупает первый опцион за 5 руб., и получает на разности премий 3 руб.

Если к моменту истечения срока действия контрактов $S < 100$руб., оба опциона не исполняются, и прибыль арбитражера равна 3 руб.

Если 100руб. $< S <$ 105руб., инвестор исполняет первый опцион. Второй опцион не исполняется. Прибыль равна 3 руб. плюс доход от исполнения первого опциона.

Если $S >$ 105руб., исполняются оба опциона. Арбитражер покупает акцию по первому опциону за 100 руб. и поставляет ее контрагенту по второму опциону за 105 руб. Общая прибыль равна 8 руб.

Относительная стоимость опционов

Подобно приведенным выше, существует множество безарбитражных соотношений, которым должна удовлетворять стоимость опционов. Эти соотношения выполняются независимо от вероятностной модели, используемой для описания динамики цен акций.

Теорема. Пусть операционные издержки или требования по марже отсутствуют, предоставление займа или получение кредита возможно по безрисковой процентной ставке, все процентные ставки неотрицательны, а арбитражные возможности отсутствуют. Тогда

1. Любой Американский опцион колл (пут) не может стоить меньше в остальном такого же опциона колл (пут), но с меньшим временем до истечения срока.
2. Любой опцион колл (пут) не может стоить больше другого опциона колл (пут) с более низкой (высокой) ценой исполнения, если в остальном он от него не отличается.
3. Разница в стоимости двух опционов не может быть больше разницы соответствующих цен исполнения, если в остальном они не отличаются.
4. Стоимость любого опциона колл не может быть больше цены акции, Американский опцион пут никогда не стоит больше цены исполнения, а Европейский опцион пут не может стоить больше, чем приведенное значение цены исполнения.

Замечание. Утверждение (1) теоремы показывает, что стоимость Американского опциона растет вместе со временем до истечения. Однако это утверждение для Европейских опционов может и не выполняться.

Доказательство проведем лишь для утверждения (1) в отношении опциона колл. Предположим от противного, что $C_{t_1} > C_{t_2}$, где $t_1 < t_2$. В этом случае покупаем опцион по C_{t_2}, и продаем по C_{t_1}, получая в результате в момент 0 сумму $C_{t_1} - C_{t_2}$. Затем в момент $t \le t_2$, когда короткий опцион колл либо прекращает свое существование, либо исполняется, наша позиция по нему имеет цену $C_t - \max(S_t - X,\ 0)$. Если это значение положительно, мы закрываем позицию с прибылью, продавая остающийся у нас опцион колл. В противном случае $\max(S_t - X, 0) \geq C_t \geq 0$ и короткий опцион колл исполняется. В этом случае мы также исполняем свой опцион колл и в сумме получаем нулевой денежный поток. В результате как в первом, так и во втором случае совокупная выплата положительна. □

Паритет пут−колл

Предположим, что дивиденды наличными по акции не выплачиваются, либо опционы защищены таким образом, что их стоимость оказывается нечувствительной к таким дивидендам.

Теорема. Пусть имеется портфель из одного короткого Европейского опциона колл, одного длинного Европейского опциона пут, одной акции и ссуды с приведенной стоимостью ПЗ(X), причем у обоих опционов одна и та же цена исполнения и то же время до истечения срока. Тогда при отсутствии арбитража имеет место равенство (паритет пут−колл):

$$C = P + S - \text{ПЗ}(X).$$

Замечание. Это тождество открыл в 1977 г. Кастелли и с тех пор оно было переоткрыто много раз.

Доказательство. Пусть t — время до истечения срока. Первоначально полученная сумма денег равна $C - P - S + \text{ПЗ}(X)$. В момент окончания, если цена акции S_t не больше X, то опцион пут будет стоить $X - S_t$, а опцион колл окажется бесполезным. С другой стороны, если $S_t > X$, то опцион колл будет стоить $S_t - X$, а опцион пут окончит свои дни бесполезным. И как только ссуда, на этот момент в размере X, будет возвращена, то чистое накопленное значение нашего денежного потока окажется нулевым в обоих случаях. Но принцип отсутствия арбитража означает, что сумма, позволяющая приобрести вышеуказанный портфель, также должна быть нулевой. □

Из паритета пут−колл вытекают многочисленные следствия. Во-первых, можно сказать, что по сути существует лишь один тип Европейского опциона, поскольку другой может быть воссоздан по нему с помощью комбинации с базовой акцией и безрисковым кредитованием или заимствованием. Подобные комбинации создают так называемые *синтетические* ЦБ. К примеру, записывая равенство пут−колл в виде $S = C - P + \text{ПЗ}(X)$, мы понимаем, что акция эквивалентна портфелю, содержащему длинный опцион колл, короткий опцион пут и предоставление кредита на сумму ПЗ(X). Но использовать паритет пут−колл можно и по-другому. Рассмотрим равенство $C - P = S - \text{ПЗ}(X)$, которое означает, что длинный опцион колл и короткий опцион пут сводятся к длинной позиции по акции и займу на сумму ПЗ цены исполнения — другими словами, к покупке акции с маржой. Но последнему естественно предпочесть занятие длинной позиции по акции «под рычагом» (т.е. при финансовой поддержке), поскольку покупка акции с маржой обусловлена строгими требованиями по марже.

Паритет пут−колл означает, что $C = (S - X) + [X - \text{ПЗ}(X)] + P \geq S - X$. Поскольку $C \geq 0$, то отсюда вытекает, что $C \geq \max(S - X, 0)$, т.е. больше внутренней стоимости. Но любой Американский опцион также не может стоить меньше своей внутренней стоимости. Тем самым справедливо

Следствие 1. Любой Американский или Европейский опцион колл по бездивидендной акции не может стоить меньше своей внутренней стоимости.

Европейский опцион пут может продаваться по более низкой цене, чем его внутренняя стоимость. Например, стоимость опциона пут становится меньше его внутренней стоимости, если опцион «глубоко в деньгах». В этом можно убедиться и формально, поступая следующим образом. Из паритета пут−колл вытекает, что

$$P = (X - S) + [\text{ПЗ}(X) - X + C].$$

По мере погружения опциона пут «в деньги» стоимость опциона колл приближается к нулю и потому

$$P \approx (X - S) + \text{ПЗ}(X) - X < X - S,$$

т. е. меньше его внутренней стоимости при положительных процентных ставках. В силу паритета пут−колл для Европейского опциона пут имеет место и следующая оценка снизу.

Следствие 2. Для Европейского опциона пут

$$P \geqslant \max(\text{ПЗ}(X) - S, 0).$$

Вот еще одно следствие. Предположим, что ПЗ дивидендов, чьи даты выплат предшествовали моменту окончания срока действия опциона, равно D. Тогда паритет пут−колл принимает следующий вид:

$$C = P + S - D - \text{ПЗ}(X).$$

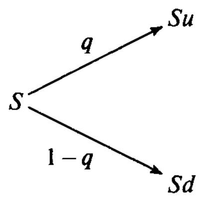
8. Модели оценки стоимости опционов

Хотя оценить стоимость опциона в момент окончания срока его действия довольно просто, но оценка его стоимости в любой предшествующий момент представляет собой серьезную проблему.

Очевидно, что стоимость опционов должна зависеть от распределения вероятностей цены базового актива, а также от выбора процентной ставки, отражающей риск актива, по которой дисконтируется выплата по опциону. И ни один из этих факторов нельзя наблюдать непосредственно. В настоящее время существует несколько моделей оценки стоимости опционов, основными из которых являются ***биномиальная модель*** и ***модель Блэка-Шоулза***.

8.1. Биномиальная модель оценки стоимости опциона

В модели БМОО время дискретно и измеряется в периодах. В ней предполагается, что если текущая цена акции в начале периода есть S, то в конце его она может стать равной Su с вероятностью q и Sd с вероятностью $1-q$, где $0 < q < 1$ и $d < u$:

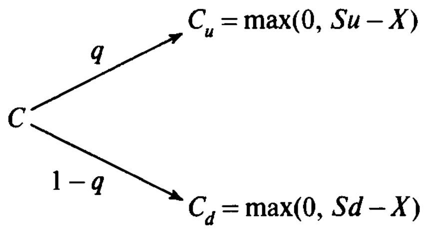


Опционы на бездивидендную акцию: один период

Предположим, что окончание срока действия опциона наступит через период после настоящего момента. И пусть стоимость опциона колл в момент 1 (т.е. выплата по нему) будет равна C_u, если цена акции стала равной Su, и C_d, если цена акции уменьшилась до Sd. Ясно, что

$$C_u = \max(0,\, Su - X), \qquad C_d = \max(0,\, Sd - X).$$

Следующий рисунок служит иллюстрацией этих формул стоимости однопериодного опциона колл в БМОО.



Соберем теперь портфель из h акций и B долларов в безрисковых облигациях. Его стоимость в момент 0 равна $hS + B$, и величина h здесь называется *коэффициентом хеджирования* или *дельтой*. Стоимость же портфеля в момент 1 будет равна либо $hSu + RB$, либо $hSd + RB$.

Ключевой шаг теперь сводится к выбору таких величин h и B, чтобы стоимость портфеля в момент 1 оказывалась равной выплате по опциону колл:

$$hSu + RB = C_u, \qquad hSd + RB = C_d.$$

Решая данные уравнения, получаем, что

$$h = \frac{C_u - C_d}{Su - Sd} \geqslant 0,$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)R}.$$

Тем самым искусственно создан *эквивалентный портфель*, который копирует рассматриваемый опцион колл. Этот портфель называется также *портфелем-копией* или *хеджирующим портфелем*.

В силу принципа безарбитражности стоимость Европейского опциона колл должна совпадать со стоимостью эквивалентного портфеля в момент 0, или быть равной $C = hS + B$. Поскольку легко проверить, что

$$uC_d - dC_u = \max(0,\, Sud - Xu) - \max(0,\, Sud - Xd) < 0,$$

то ясно, что эквивалентный портфель представляет собой длинную позицию по акции одновременно с займом (поскольку B<0).

Для Американских опционов колл следует рассмотреть случай немедленного исполнения. Если $hS + B \geq S - X$, то опцион колл не следует исполнять сразу и потому $C = hS + B$. С другой стороны, если $hS + B < S - X$, то опцион следует исполнить немедленно, поскольку полученную выручку $S - X$ можно использовать для покупки эквивалентного портфеля плюс еще какое-то количество облигаций; поэтому $C = S - X$. Отсюда мы заключаем, что $C = \max(hS + B, S - X)$. Но для бездивидендных акций раннее исполнение не является оптимальным. Опять получается, что $C = hS + B$.

Опцион пут можно оценивать аналогично. Дельта для него равна

$$\frac{P_u - P_d}{Su - Sd} \leqslant 0, \text{ где } P_u = \max(0, X - Su), \text{ а } P_d = \max(0, X - Sd).$$

Европейский опцион пут стоит $hS + B$, а Американский — $\max(hS + B, X - S)$, где

$$B = \frac{uP_d - dP_u}{(u-d)R}.$$

Риск-нейтральная оценка стоимости

Удивительно, но стоимость опциона не зависит от q, вероятности повышения цены, и потому ожидаемый грубый доход по акции, равный qSu + (1 − q)Sd, также не зависит от q. А, следовательно, напрямую она не зависит и от инвесторского *отношения к риску* и будет оценена одинаково вне зависимости от того, с каким отвращением к риску он относится. Арбитражная аргументация предполагает лишь, что более определенное богатство предпочтительно перед менее определенным. В то же время стоимость опциона зависит от величин u и d, уточняющих изменение цены, с которыми инвесторы должны согласиться. После подстановки и перегруппировки получим, что

$$hS + B = \frac{\frac{R-d}{u-d}C_u + \frac{u-R}{u-d}C_d}{R} > 0.$$

Перепишем это равенство в следующем виде

$$hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R},$$

полагая

$$p \equiv \frac{R-d}{u-d}.$$

Поскольку $0 < p < 1$, то это число можно считать вероятностью. В биномиальной модели ожидаемая доходность по акции равна безрисковой ставке $\hat{r}$ в предположении, что $q = p$, поскольку

$$pSu + (1-p)Sd = RS.$$

Назовем инвестора *нейтральным к риску*, если ему все равно, получит ли он гарантированный доход или неопределенный доход, но с тем же средним значением. Нейтрального к риску инвестора беспокоит лишь средний доход. И если инвесторы нейтральны к риску, то ожидаемая ставка доходности по всем ЦБ должна равняться безрисковой ставке. По этой причине величина p называется *риск-нейтральной вероятностью*. Поскольку же отношение значение q прямо не вовлечены в оценку стоимости опционов, то любое отношение к риску, и в том числе нейтральное, должны приводить к одному результату. Поэтому стоимость опциона в риск-нейтральной экономике можно интерпретировать как математическое ожидание дисконтированной будущей выплаты по нему. Поэтому же оказывается, что ставкой дисконтирования накопленного значения в риск-нейтральной экономике является безрисковая ставка. Риск-нейтральная оценка стоимости, возможно, является наиболее важным инструментом анализа производных ЦБ.

Далее понадобятся обозначения для вероятности *биномиального распределения* с параметрами n и p :

$$b(j;\, n,\, p) \equiv \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$$

и вероятности получения по меньшей мере k гербов в n бросаниях монеты, которую можно будет записать с помощью так называемой *дополнительной функции биномиального распределения* с параметрами n и p:

$$\Phi(k;\, n,\, p) \equiv \sum_{j=k}^{n} b(j;\, n,\, p).$$

Поскольку получение меньшего чем k числа гербов эквивалентно получению по меньшей мере $n - k + 1$ решеток, то

$$1-\Phi(k;\,n,p)=\Phi(n-k+1;\,n,\ 1-p).$$

Опционы на бездивидендные акции: случай многих периодов

Рассмотрим опцион колл, которому предстоит жить два периода. В биномиальной модели цена акции в момент два может принять одно из трех значений: *Suu*, *Sud* и *Sdd*. Изменение цены акции на двух периодах может быть представлен в виде следующего графа. Этот граф называется биномиальным деревом, хотя термин биномиальная решетка подходит лучше, поскольку ветви реального дерева не слипаются на концах.

$$\begin{tikzcd}
 & & Suu \\
 & Su \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & Sud \\
 & Sd \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & Sdd
\end{tikzcd}$$

Заметим, что в любом узле графа следующие два значения цены зависят лишь от текущей цены, но не от цен предыдущих моментов. Это свойство отсутствия памяти является ключевым моментом эффективного рынка.

Пусть C_{uu} означает стоимость опциона колл в момент два, если цена акции равна *Suu*. Таким образом,

$$C_{uu}=\max(0,\ Suu-X).$$

Аналогично получаем

$$C_{ud}=\max(0,\ Sud-X),\qquad C_{dd}=\max(0,\ Sdd-X).$$

В результате получаем дерево:

$$\begin{tikzcd}
 & & C_{uu}=\max(0,\ Suu-X) \\
 & C_u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_{ud}=\max(0,\ Sud-X) \\
 & C_d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_{dd}=\max(0,\ Sdd-X)
\end{tikzcd}$$

Стоимость опциона колл в момент 1 можно получить, используя рассуждения предыдущего п., следующим образом:

$$C_u=\frac{pC_{uu}+(1-p)C_{ud}}{R},\qquad C_d=\frac{pC_{ud}+(1-p)C_{dd}}{R}.$$

Значение же дельта можно получить по формуле для h. Скажем, дельта в точке C_u равна

$$\frac{C_{uu}-C_{ud}}{Suu-Sud}.$$

Теорема 1. В риск-нейтральной экономике стоимость Европейского опциона равняется математическому ожиданию дисконтированной выплаты по нему в момент окончания его срока действия, т.е.

$$e^{-\hat{r}n}E^{\pi}[\mathscr{D}],$$

где $\hat{r}$ — безрисковая ставка, n —число периодов, $\mathcal{D}$ — терминальная величина выплаты, а символ E^{π} означает, что математическое ожидание берется по риск-нейтральной вероятностной мере π. Т.е. стоимость Европейского опциона колл равна

$$C = R^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \times \max(0,\ Su^j d^{n-j} - X).$$

а стоимость Европейского опциона пут равна

$$P = R^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \times \max(0,\ X - Su^j d^{n-j}).$$

Доказательство. Обратимся к текущему периоду. Эквивалентный портфель из A акций и безрисковых облигаций на сумму \$ B можно подобрать для опциона колл, который стоит C_u (C_d), если цена акции изменилась на Su (Sd).

Поскольку опцион колл не будет исполнен в момент один, даже если он Американский, то $C_u > Su - X$ и $C_d > Sd - X$. Следовательно,

$$hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R} > \frac{(pu + (1-p)d)S - X}{R} = S - \frac{X}{R} > S - X.$$

Поэтому в настоящий момент опцион колл не будет исполнен и потому

$$C = hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}.$$

Вышеуказанное выражение представляет величину C с помощью последующих узлов C_u и C_d и ничего более. Но аналогичный расчет производится также в узлах C_u и C_d. Эта рекуррентная процедура называется *обратной индукцией*, поскольку она выражает более ранние величины через более поздние. Поэтому

$$C = \frac{p^2 C_{uu} + 2p(1-p)\, C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}}{R^2} =$$

$$= \frac{p^2 \max(0,\ Su^2 - X) + 2p(1-p) \max(0,\ Sud - X) + (1-p)^2 \max(0,\ Sd^2 - X)}{R^2}.$$

Искомое выражение в общем случае возникает так же просто: нужно лишь в каждом узле проделать одинаковые вычисления и собрать их, двигаясь в направлении, обратном по времени. В результате, при n периодах будем иметь:

$$C = R^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \times \max(0,\ Su^j d^{n-j} - X).$$

Полученное представление означает, что в риск-нейтральной экономике стоимость опциона колл на бездивидендную акцию является математическим ожиданием дисконтированной выплаты по нему в момент окончания его срока действия. Поскольку же это C является единственным значением стоимости опциона, при котором отсутствуют арбитражные возможности, то оно называется *арбитражной стоимостью*. Аналогично устанавливается величина стоимости Европейского опциона пут. □

Теорема 2. Стоимости Европейских опционов колл и пут равны соответственно

$$C = S\Phi(a;\ n,\ pue^{-\hat{r}}) - Xe^{-\hat{r}n}\Phi(a;\ n,\ p),$$

$$P = Xe^{-\hat{r}n}\Phi(n - a + 1;\ n,\ 1 - p) - S\Phi(n - a + 1;\ n,\ 1 - pue^{-\hat{r}}),$$

где $p = \left(e^{\hat{r}} - d\right)/(u - d)$, а число a представляет собой минимальное число скачков цены акции вверх для того, чтобы опцион колл оказался в деньгах в момент n.

Доказательство. Величина a минимального числа скачков цены вверх для того, чтобы опцион колл оказался в деньгах, должна быть таким минимальным неотрицательным целым числом, что

$$Su^a d^{n-a} \geqslant X,$$

т.е.

$$a = \left\lceil \frac{\ln(X/Sd^n)}{\ln(u/d)} \right\rceil.$$

Отсюда

$$C=\frac{\sum\limits_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(Su^jd^{n-j}-X)}{R^n}=$$

$$=S\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}\frac{(pu)^j[(1-p)d]^{n-j}}{R^n}-\frac{X}{R^n}\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=$$

$$=S\sum_{j=a}^{n}b(j;\,n,\,pue^{-\hat{r}})-Xe^{-\hat{r}n}\sum_{j=a}^{n}b(j;\,n,\,p).$$

Стоимость опциона пут можно получить с помощью паритета пут−колл. Она может быть получена также, следуя вышеизложенной логике для опциона колл, но с заменой терминальной выплаты max(0, S−X) на max(0, X−S). □

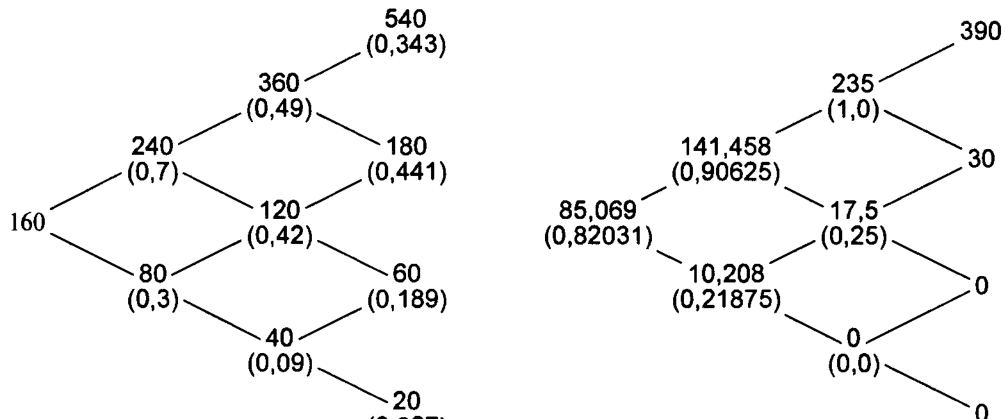
Замечание. С помощью случайной величины $\boldsymbol{S}$, обозначающей стоимость акции в момент окончания срока действия опциона, стоимость опционов можно записать в виде

$$C=S\times \mathrm{P}_1\{S\geqslant X\}-Xe^{-\hat{r}n}\times \mathrm{P}_2\{S\geqslant X\},$$

$$P=Xe^{-\hat{r}n}\times \mathrm{P}_2\{S\leqslant X\}-S\times \mathrm{P}_1\{S\leqslant X\},$$

где символы P_1, P_2 означают, что имеется в виду биномиальное распределение для числа скачков цены акции вверх на всех *n* периодах, причем вероятность скачка цены акции вверх за один период в случае P_1 равна pu/R а в случае P_2 равна p.

Пример. Некоторая бездивидендная акция продается по цене $160 за акцию. От любого своего значения S цена может либо подняться до S × 1,5, либо опуститься до S × 0,5. Имеется также и безрисковая облигация со ставкой непрерывного начисления процентов за период, равной 18,232%. Рассмотрим Европейский опцион колл на эту акцию с ценой исполнения в $ 150 и тремя периодами до окончания срока действия. Ниже указано изменение цены акции (а) и стоимости опциона (б).



(а) В скобках указаны вероятности

(б) В скобках указаны значения дельта

Используемые параметры: S = 160,

$$X=150,\ n=3,\ u=1{,}5,\ d=0{,}5,\ R=e^{0{,}18232}=1{,}2,\ p=\frac{R-d}{u-d}=0{,}7,\ h=\frac{C_u-C_d}{Su-Sd}=\frac{C_u-C_d}{S},$$

$$C=\frac{pC_u+(1-p)C_d}{R}=\frac{0{,}7\times C_u+0{,}3\times C_d}{1{,}2}.$$

По методу обратной индукции было определено, что стоимость опциона колл равна $85,069. Но то же самое значение можно получить и как ПЗ ожидаемой выплаты при окончании его срока действия:

$$\frac{(390\times 0{,}343)+(30\times 0{,}441)}{(1{,}2)^3}=85{,}069.$$

Обратите внимание, что значение дельты меняется в зависимости от цены и времени.

Любая неправильная оценка ведет к арбитражной прибыли. Предположим, что опцион продается за $90, т.е. по более высокой цене. Тогда мы продаем колл за $90 и инвестируем $85,069 в эквивалентный портфель с 0,82031 сертификата акции, как того и требует дельта. Чтобы собрать такой портфель, нам нужно занять 0,82031 х 160 − 85,069 = 46,1806 долларов. В остатке останется 90 − 85,069 = 4,931 долларов. Эта сумма и будет арбитражной прибылью.

Шаг 1. Предположим, что цена акции поднимается до \$240. Новая дельта равна 0,90625. Покупаем на 0,90625 − 0,82031=0,08594 больше акций за 0,08594 х 240 = 20,6256 долларов, занимая и эту сумму. Тем самым наш долг становится равным 20,6256 + (46,1806 х 1,2) = 76,04232 долларам.

Шаг 2. Предположим, что цена акции падает до \$ 120. Новая дельта равна 0,25. Продаем 0,90625 − 0,25 = 0,65625 акций и получаем доход в сумме 0,65625 х 120 = 78,75 долларов. Используем эту сумму для уменьшения долга до (76,04232 х 1,2) − 78,75= 12,5 долларов.

Шаг 3 (случай роста цены). Цена акции поднимается до \$ 180, и проданный опцион колл заканчивает в деньгах. Из-за потери в 180− 150 = 30 долларов закрываем позицию либо выкупая опцион, либо покупая нужное количество акций для поставки. Финансирование этих расходов увеличивает сумму займа до (12,5х1,2) − 30 = 45 долларов, которые мы возвратим, когда продадим 0,25 акции за 0,25 х 180 = 45 долларов.

Шаг 4 (случай падения цены). Цена акции понизилась до \$60. Проданный опцион колл становится бесполезным. Продаем 0,25 акции на сумму 0,25 х 60=15 и возвращаем наш долг, ставший к этому моменту равным 12,5 х 12= 15 долларам.

8.2. Формула Блэка—Шоулса

Формула Башелье

Мы уже говорили, что Башелье, считая, что цены акций флуктуируют как броуновское движение, провел ряд расчетов для (рациональных) стоимостей некоторых опционов, имевших в его время хождение во Франции, и затем сравнил их с реальными рыночными ценами.

В *линейной модели Башелье* предполагается, что (B,S)-рынок устроен так, что банковский счет B не меняется со временем ($B_t = 1$), а цена акции S описывается линейным броуновским движением со сносом:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \qquad t \leqslant T,$$

где W — стандартный винеровский процесс (броуновское движение), заданный на некотором вероятностном пространстве. В этой модели цены принимают и отрицательные значения, и потому она не может считаться адекватно отражающей реальную картину. Тем не менее, ее рассмотрение представляет интерес с разных точек зрения — как исторически первой *диффузионной модели*, модели, которая является и *безарбитражной* и *полной*.

Теорема (***формула Башелье***). В линейной модели Башелье рациональная стоимость $\mathbb{C}_T$ стандартного опциона колл Европейского типа с стоимостью акции S_T в момент T и ценой исполнения опциона K определяется формулой

$$\mathbb{C}_T = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\,\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy.$$

В частности, при $S_0 = K$

$$\mathbb{C}_T = \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\,.$$

Формула Блэка и Шоулса

Более реалистична модель геометрического броуновского движения, в которой цены представлены в виде

$$S_t = S_0 e^{H_t}$$

где

$$H_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t.$$

Модель геометрического броуновского движения была предложена в 1965 году П. Самуэльсоном, и именно она легла в основу модели Блэка-Мертона-Шоулса, с которой связана знаменитая формула Блэка и Шоулса для рациональной стоимости стандартного опциона колл Европейского типа, полученная в 1973 году.

В модели (B,S)-рынка Блэка-Мертона-Шоулса предполагается, что банковский счет B эволюционирует так, что

$$dB_t = rB_t\,dt,$$

а цены акций S подчиняются геометрическому броуновскому движению, описываемому стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t).$$

Таким образом, пусть

$$B_t = B_0e^{rt},$$

$$S_t = S_0e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}.$$

Теорема (***формула Блэка и Шоулса***). В модели (B,S)-рынка Блэка-Мертона-Шоулса рациональная стоимость $\mathbb{C}_T$ стандартного опциона колл Европейского типа определяется формулой

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

В частности, при $S_0 = K$ и $r = 0$

$$\mathbb{C}_T = S_0\left[\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right]$$

и

$$\mathbb{C}_T \sim K\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\ \text{при}\ T \to 0$$

Замечание. Если положить

$$y_\pm = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

то формуле Блэка-Шоулса можно придать более компактный вид:

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi(y_+) - Ke^{-rT}\Phi(y_-).$$

Пусть $\mathbb{P}_T$ – рациональная стоимость стандартного опционапут Европейского типа. Тогда имеет место паритет колл-пут:

$$\mathbb{P}_T = \mathbb{C}_T - S_0 + Ke^{-rT}$$

Отсюда можно вывести

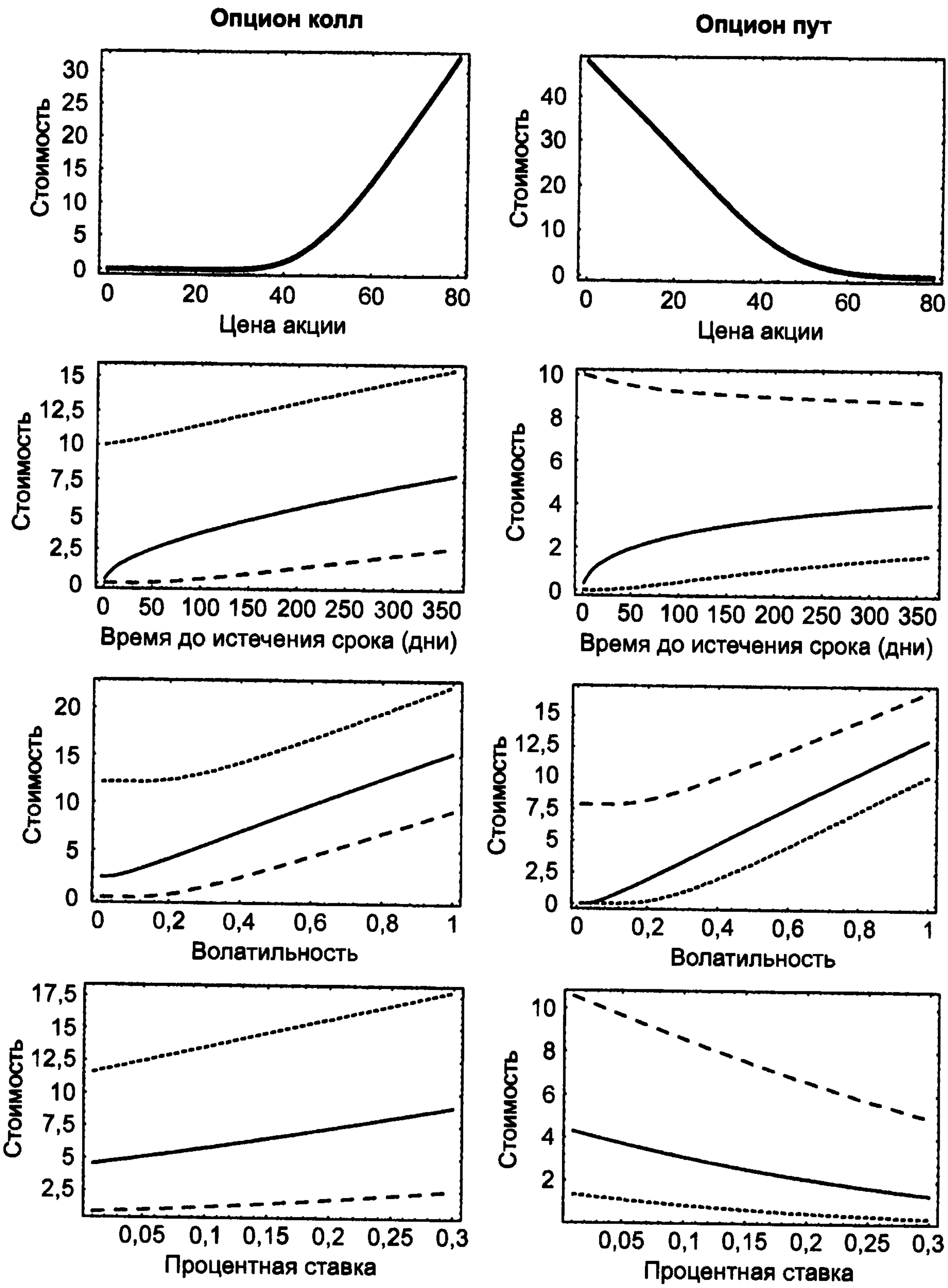
Следствие.

$$\mathbb{P}_T = -S_0\left[1-\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] + Ke^{-rT}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

или

$$\mathbb{P}_T = -S_0\Phi(-y_+) + Ke^{-rT}\Phi(-y_-).$$

Представим теперь на следующих графиках стоимость опционов колл и пут в виде функции от каждого из следующих четырех параметров: текущей цены акции, времени до окончания срока действия опциона, волатильности и процентной ставки. Заметим, в частности, что стоимость опционов в случае «при своих» по существу является линейной функцией волатильности.



Стоимость Европейского опциона как функция параметров. Параметры: S = 50, X = 50, σ = 0,3, T = 201 день и *r* = 8%. Если на одном графике изображены три кривые, то редкая пунктирная линия представляет значение S = 40 (опцион колл вне денег или пут в деньгах), сплошная — представляет значение S= 50 (около денег) и частая пунктирная линия относится к значению S = 60 (опцион колл в деньгах).

Пример. S = 50руб., X = 45руб., r = 10%, T = 6 месяцев, σ = 0,525. Определить стоимость европейского опциона колл.

Решение.

$$y_+ = \frac{\ln\left(50/45\right) + 0{,}1 \cdot 0{,}5}{0{,}525 \cdot \sqrt{0{,}5}} + 0{,}5 \cdot 0{,}525\sqrt{0{,}5} = 0{,}6041,$$

$$y_- = 0{,}6041 - 0{,}525 \cdot \sqrt{0{,}5} = 0{,}2329.$$

Далее,

$$\Phi(y_+) = 0{,}7271, \quad \Phi(y_-) = 0{,}5921.$$

Тогда

$$C_T = 50 \cdot 0{,}7271 - 45e^{-0{,}1 \cdot 0{,}5} \cdot 0{,}5921 = 11{,}01\,руб.$$