§ 1. Матчинг

Системы различных представителей — Двусторонний матчинг — Другие модели

1. Системы различных представителей.

Теорема Холла о марьяже. Эта теорема, доказанная Филипом Холлом в 1935 г., оказалась весьма важным результатом комбинаторики и теории графов, а впоследствии привела к развитию теории матчинга, имеющей множество приложений. Теорема Ф. Холла имеет ряд альтернативных формулировок, которые появились после первой публикации, а также различные доказательства. Одним из первых, кто осознал значение данной теоремы для комбинаторики и дал другую формулировку вместе с доказательством, был однофамилец Филипа Холла Маршалл Холл[1], поэтому иногда говорят: «теорема Ф. и М. Холлов». Сформулируем эту теорему в комбинаторном стиле, воспользовавшись понятием системы различных представителей.

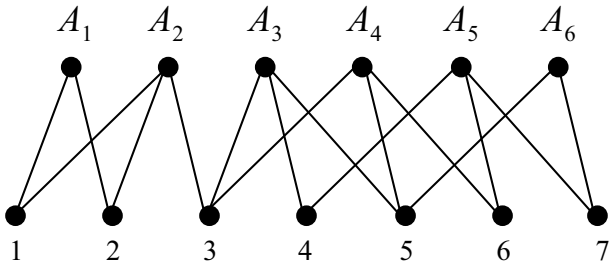
Определение 1. Пусть X — конечное множество, $\{A_1, \dots, A_n\}$ — семейство подмножеств X (не обязательно различных). Будем называть множество $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ *системой различных представителей (СРП)* семейства $\{A_1, \dots, A_n\}$, если все x_i различны и каждое x_i принадлежит A_i.

СРП не всегда существует. Теорема Холла дает необходимое и достаточное условие для существования СРП.

Теорема 1. СРП для семейства подмножеств $\{A_1, \dots, A_n\}$ существует тогда и только тогда, когда объединение любых m множеств A_i содержит не менее m элементов (для любого m, $1 \leqslant m \leqslant n$).

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим пример и интерпретацию.

Пример 1. В следующем примере семейство множеств изображено в виде двудольного графа, множество вершин которого состоит из двух долей $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, из которых верхняя индексирует семейство множеств, а ребра графа определяют отношение принадлежности. В данном слу-



чае $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{3, 4, 5\}$, $A_4 = \{3, 5, 6\}$, $A_5 = \{4, 6, 7\}$, $A_6 = \{5, 7\}$.

Интерпретация. Пусть X — множество мальчиков, $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество девочек. На множестве $X \times Y$ определено отношение «нравиться»: если $x \in A_i$, то мальчик x и девочка i нравятся друг другу и могут пожениться, так что A_i

[1] На русском языке хорошо известны две его книги: одна под названием «Комбинаторика», вторая — «Теория групп».

— в точности множество женихов девочки i. Всякая СРП интерпретируется как массовая свадьба, при которой каждая девочка выходит замуж за одного из своих женихов.

Возможны и другие интерпретации: X — фирмы, Y — рабочие, для рабочего $i \in Y$ A_i — фирмы, в которых он хотел бы работать; X — места в зрительном зале, Y — зрители, для зрителя $i \in Y$ A_i — это «его» места. На этой последней интерпретации и остановимся.

Вопрос: могут ли зрители рассесться по «своим» местам, если любая группа зрителей имеет достаточно «своих» мест?

Алгоритм рассаживания по местам. Пусть зрители входят в зал по одному и занимают «свои» места. Если уже заняты места $U \subset X$ и входит очередной зритель i, то возможно, что у него есть свободное «свое» место вне U, и он его занимает; либо все места этого зрителя заняты: $A_i \subset U$, и на них сидят другие зрители $Z \subset Y \setminus \{i\}$. В этом последнем случае согласно условиям теоремы у зрителей Z должны быть «свои» места вне A_i, т.е. $A(Z) = \bigcup\limits_{j \in Z} A_j \neq A_i$.

Здесь опять две возможности: либо имеется свободное место для одного зрителя из Z вне U — тогда он пересаживается туда, освобождая место для i; либо все такие места заняты: $A(Z) \setminus A_i \subset U$. В последнем случае рассмотрим зрителей $Z_1 \subset Y \setminus (Z \cup \{i\})$, которые сидят на этих местах и повторим процедуру, вовлекая в рассмотрение все возрастающие круги зрителей $\{i\} \subset \{i\} \cup Z \subset \{i\} \cup Z \cup Z_1 \subset \ldots$ и соответствующих им мест, пока не найдется место вне U. После этого будет определена цепочка зрителей, которые могут пересесть с одного «своего» места на другое, освобождая в конце концов место для зрителя i.

Доказательство теоремы Холла.

Совершенно очевидно, что условие теоремы необходимо. Если m множеств A_i содержит меньше m элементов в совокупности, то из этих m множеств нельзя выбрать m различных элементов. Удивительный факт — это очевидное условие также и достаточно. Первоначальное доказательство Ф. Холла было достаточно сложным; приведем доказательство достаточности, основанное на идеях Халмоша.

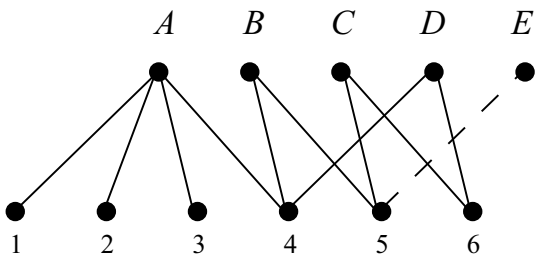
Доказательство достаточности. Используем индукцию по n. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n > 1$ и пусть $\{A_1, \ldots, A_n\}$ удовлетворяет условию теоремы, которое обозначим (Н). Назовем семейство l множеств A_i $(1 \leqslant l < n)$ *критическим*, если его объединение содержит l элементов. Теперь рассмотрим 2 случая.

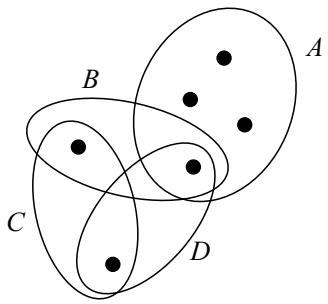
Случай 1. Нет критических семейств. Выберем произвольный элемент $x \in A_n$. Удалим x из X и рассмотрим семейство $\{A'_1, \ldots, A'_{n-1}\}$, где $A'_i = A_i \setminus x$. Поскольку критических семейств нет, объединение m любых множеств A'_i содержит не менее m элементов. Следовательно, индукцией по n показывается, что существует СРП $x_1, \ldots, x_{n-1}$ семейства $\{A'_1, \ldots, A'_{n-1}\}$, а вместе с $x = x_n$ это дает СРП для исходного семейства.

Случай 2. Существует критическое семейство. Без ограничения общности можно считать $\{A_1, \ldots, A_l\}$ критическим семейством. Пусть $\tilde{X} := \bigcup\limits_{i=1}^{l} A_i$, $|\tilde{X}| = l$. Так как $l < n$, то для $A_1, \ldots, A_l$ существование СРП выводится по индукции — это некоторое перечисление элементов $x_1, \ldots, x_l$ множества $\tilde{X}$ такое, что $x_i \in A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. Рассмотрим теперь остальные множества $A_{l+1}, \ldots, A_n$, и возьмем m любых из них.

Так как объединение $A_1, \ldots, A_l$ и этих m множеств содержит не менее $l+m$ элементов по условию (Н), заключаем, что эти m множеств содержат в совокупности не менее m элементов вне $\tilde{X}$. Другими словами, условие (Н) справедливо для семейства $A_{l+1} \setminus \tilde{X}, \ldots, A_n \setminus \tilde{X}$. Индукция дает СРП для этого семейства. Объединяя ее с $x_1, \ldots, x_l$, получаем СРП для всех множеств $A_1, \ldots, A_n$. □

Пример 2. Здесь имеется критическое семейство $\{B, C, D\}$. Если добавить еще множество $E = \{5\}$, то будет нарушено условие (Н).





Следствие — теорема Кёнига. Назовем линией матрицы ее строку или столбец. Будем рассматривать двоичную матрицу (т.е. матрицу из 1 и 0). Будем говорить, что в двоичной матрице набор линий покрывает все ее единичные элементы, если каждая единица принадлежит хотя бы одной линии набора. Две единицы матрицы называются независимыми, если они не принадлежат одной линии.

Теорема 2. (Теорема Кёнига). В любой двоичной матрице наибольшее число независимых единичных элементов равно наименьшему числу линий, покрывающих все единицы.

Доказательство состоит в том, чтобы рассматривать матрицу как матрицу инциденций множеств и элементов, т.е. считать $j \in A_i$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 1$.

Пример 3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, наименьшее число линий в матрице M, покрывающих все единицы, равно 4.

Обобщение — теорема о гаремах.

Определение 2. Пусть X — конечное множество, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ — семейство подмножеств X (не обязательно различных), $b_1, \ldots, b_n$ — целые положительные числа. Будем говорить, что попарно непересекающиеся множества $K_1, \ldots, K_n \subset X$ образуют *семейство гаремов* для $\{A_1, \ldots, A_n\}$, если $K_i \subset A_i$ и $|K_i| = b_i$ для каждого i.

Теорема 3. Семейство гаремов для подмножеств $\{A_1, \ldots, A_n\}$ существует тогда и только тогда, когда для любого набора этих подмножеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ $(i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\})$ справедливо неравенство $|A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}| \geqslant b_{i_1} + \ldots + b_{i_m}$.

2. Двусторонний матчинг.

Модель марьяжа. Рассмотрим два конечных непересекающихся множества индивидов: $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ — мужчины и $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ — женщины. Каждый мужчина имеет свои *предпочтения* среди женщин, и каждая женщина имеет свом предпочтения среди мужчин. Эти предпочтения транзитивны и линейны. Дополнительно к этому, необходимо предусмотреть возможность того, что мужчина m, к примеру, предпочтет остаться одиноким, нежели сочетаться браком с некоторой женщиной w.

Предпочтения каждого мужчины будут представляться упорядоченным списком $P(m)$ элементов множества $W \cup \{m\}$. Например, $P(m) = w_1, w_2, m, w_3, \ldots, w_m$ (первый выбор — жениться на w_1, второй выбор — на w_2, третий — остаться холостяком). Аналогично для женщин — каждая имеет свой список $P(w)$ элементов множества $M \cup \{w\}$. В принципе, список можно сокращать: $P(m) = w_1, w_2$ так как все дальнейшее очевидно.

Обозначим P множество списков предпочтений: $P = \{P(m_1), \ldots, P(m_n), P(w_1), \ldots, P(w_m)\}$. Будем называть P двусторонним профилем предпочтений. Каждая тройка (M, W, P) определяет некоторый *рынок марьяжа.* Будем писать $w \underset{m}{>} w'$, если m предпочитает w, а не w', и $w \geqslant_m w'$, если для m w не хуже w'. Аналогично определяем $m \underset{w}{>} m'$ и $m \geqslant_w m'$. Будем называть женщину w *приемлемой* для m, если для него вариант выбрать ее не хуже, чем остаться одиноким, т.е. $w \geqslant_m m$. Аналогично, m приемлем для w, если $m \geqslant_w w$. Иногда допускаются безразличия, например, $w \geqslant_m w'$ и $w' \geqslant_m w$ (при $w \neq w'$); в таком случае будем писать $w \sim_m w'$. Если у индивида нет безразличия среди приемлемых альтернатив, будем говорить, что он (она) имеет строгие предпочтения. Если предпочтения строгие и все альтернативы приемлемы, то будем говорить, что он (она) имеет стандартные предпочтения. Когда предпочтения всех индивидов стандартны, профиль предпочтений P также будем называть стандартным.

Исходом (результатом) рынка марьяжа является некоторое множество марьяжей. Необходимо предусмотреть, что не все женятся — кто-то может остаться холостым.

Определение 3. *Матчинг* μ — взаимно однозначное отображение множества $M \cup W$ на себя, обладающее свойствами:

1) если $\mu(m) = w$, то $\mu(w) = m$ (т.е. $\mu^2(x) = x$ для любого $x \in M \cup W$);
2) если $\mu(m) \neq m$, то $\mu(m) \in W$ (таким образом, $\mu(m) \in W \cup \{m\}$);
3) если $\mu(w) \neq w$, то $\mu(w) \in M$ (таким образом, $\mu(w) \in M \cup \{w\}$).

Например, $\mu = \begin{matrix} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$

Будем считать заданными и предпочтения индивидов среди матчингов: мужчина m предпочитает μ матчингу ν, если он предпочитает $\mu(m)$ альтернативе $\nu(m)$.

Улучшения матчингов.

Пример 4. Пусть на множествах $M = \{a, b, c, d, e\}$, $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ задан стандартный профиль предпочтений:

$$\begin{array}{llll} a: & \gamma \succ \delta \succ \alpha \succ \beta \succ \varepsilon & \alpha: & a \succ d \succ c \succ e \succ b \\ b: & \alpha \succ \gamma \succ \beta \succ \delta \succ \varepsilon & \beta: & a \succ b \succ d \succ c \succ e \\ c: & \alpha \succ \varepsilon \succ \beta \succ \delta \succ \gamma & \gamma: & d \succ e \succ c \succ a \succ b \\ d: & \beta \succ \alpha \succ \gamma \succ \varepsilon \succ \delta & \delta: & c \succ b \succ a \succ e \succ d \\ e: & \beta \succ \gamma \succ \alpha \succ \delta \succ \varepsilon & \varepsilon: & a \succ b \succ d \succ e \succ c \end{array}$$

Рассмотрим матчинг $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, $e\varepsilon$. Данный матчинг может быть улучшен, если вне матчинга найдется пара (x, η) такая, что для мужчины x женщина η предпочтительнее, чем его партнер в матчинге, и η предпочитает x своему партнеру в матчинге. В таком случае пара (x, η) называется *разрушителем* матчинга, или говорят, что пара (x, η) *блокирует* матчинг. В нашем примере пара (a, δ) блокирует матчинг. Но, например, пара (a, γ) не блокирует матчинг: хотя $\gamma \succ_a \alpha$, но у γ нет намерения объединиться с a, так как $c \succ_\gamma a$.

Другой способ улучшить матчинг — найти в нем пару, каждый индивид из которой предпочтет остаться холостым, нежели сочетаться браком в подобранной паре.

Разумеется, интерес представляют такие матчинги, которые не могут быть улучшены.

Устойчивые матчинги.

Определение 4. Матчинг μ называется *индивидуально рациональным*, если он не содержит пары (m, w), в которой каждый неприемлем для другого, т.е. $m >_m w$ и $w >_w m$. Если бы такая пара содержалась в μ, матчинг мог бы быть улучшен индивидуально, так как правила разрешают оставаться индивиду холостым.

Кроме того, будем говорить, что матчинг μ может быть *улучшен* посредством пары (m, w), если эта пара не содержится в матчинге μ, т.е. $w \neq \mu(m)$ и $m \neq \mu(w)$, но каждый из этой пары предпочтительнее для другого, чем партнер по матчингу μ: $w >_m \mu(m)$ и $m >_w \mu(w)$.

Иногда используется другая терминология: говорят, что индивид k (мужчина или женщина) *блокирует* матчинг μ, если k предпочитает быть холостым, нежели сочетаться браком с $\mu(k)$, т.е. $k >_k \mu(k)$. Говорят, что пара (m, w) *блокирует* матчинг μ, если $w >_m \mu(m)$ и $m >_w \mu(w)$.

Предположим теперь, что матчинг находится в процессе формирования и официального закрепления. Тогда на этой стадии, если он может быть улучшен, то является неустойчивым: при наличии блокирующей пары (m, w) индивиды m и w уйдут от своих партнеров и образуют пару друг с другом, если же матчинг индивидуально иррационален, то в нем найдется пара, которой лучше разойтись.

Определение 5. Матчинг μ называется *стабильным* (*устойчивым*), если он не может быть улучшен индивидуально или посредством пары.

Теорема Гейла–Шепли.

Теорема 4. (Гейл, Шепли, 1962).[2] В любой модели марьяжа существует хотя бы один устойчивый матчинг.

Алгоритм отложенного принятия предложений мужчин.

0. Если некоторые предпочтения не строгие, то произвольным образом разбиваем связки (т.е., если, например, $w_i \sim_m w_j$, упорядочим w_i и w_j в предпочтении m лексикографически; но можно, конечно, и в случайном порядке).

1. a. Каждый мужчина делает предложение номеру 1 в своем списке (если у него есть приемлемые кандидатуры).

   b. Каждая женщина отвергает сразу всех неприемлемых кандидатов, и, если она получила более одного приемлемого предложения, «откладывает» (или «берет на заметку») наиболее предпочтительное, а остальные отвергает.

k. a. Всякий мужчина, отвергнутый на шаге $k-1$, делает новое предложение следующей приемлемой женщине из своего списка, которая его еще не отвергла. (Если приемлемых выборов у него не осталось, то он не делает больше предложений.)

   b. Каждая женщина оставляет одно наиболее предпочтительное из предложений, полученных ей к настоящему моменту, и отвергает остальные.

Результат. Когда не делается ни одно предложение, алгоритм останавливается и составляется матчинг из пар: женщина и мужчина, чье предложение она оставила.

Доказательство теоремы непосредственно следует из того, что алгоритм всегда останавливается: так как ни один мужчина не делает предложения дважды одной и той же женщине, количество шагов алгоритма не должно превышать nm, где $n = |M|$, $m = |W|$. Кроме того, результатом всегда является устойчивый матчинг. Действительно, индивидуальная рациональность вытекает из того, что ни один мужчина не делает предложения неприемлемой для него женщине, и ни одна женщина не оставляет предложения неприемлемого для нее мужчины. Чтобы доказать отсутствие блокирующих пар, предположим, что мужчина предпочитает другую женщину, нежели та, которая приняла его предложение. В таком случае он уже сватался к той женщине раньше и получил отказ, потому что у той оказалось лучшее предложение, так что они не могут образовать блокирующую пару. □

Дальнейшее развитие теории двустороннего матчинга.

Теорема 5. (Гейл, Шепли). Если все предпочтения в двустороннем профиле строгие, то множество устойчивых матчингов содержит M-оптимальный устойчивый матчинг, который для любого мужчины не хуже других устойчивых матчингов, и, аналогично, W-оптимальный устойчивый матчинг.

Теорема 6. (Мак-Вити, Уилсон, 1970). Множество одиноких мужчин и женщин во всех устойчивых матчингах при фиксированном профиле одно и то же.

Теорема 7. (Рот, 1982). M-оптимальный устойчивый матчинг μ_M слабо оптимален по Парето для мужчин среди всех индивидуально рациональных матчингов, т.е. не существует индивидуально рационального матчинга μ (устойчивого или неустойчивого) такого, что $\mu >_m \mu_M$ для всех $m \in M$, (и, аналогично, W-оптимальный устойчивый матчинг μ_W слабо оптимален по Парето для женщин).

[2] 12.07.2007 г. Дэвид Гейл рассказал историю своего сотрудничества с Ллойдом Шепли. Гейл предложил модель, определение устойчивости и гипотезу о существовании устойчивого матчинга и разослал сообщение нескольким своим коллегам. В ответном письме Шепли предложил алгоритм и доказательство гипотезы.

Утверждение этой теоремы не может быть усилено для случая сильной оптимальности по Парето.

Пример 5. Пусть $M = \{a, b, c\}$, $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, и задан профиль предпочтений

$$\begin{array}{llll} a: & \beta \succ \alpha \succ \gamma & \alpha: & a \succ b \succ c \\ b: & \alpha \succ \beta \succ \gamma & \beta: & c \succ a \succ b \\ c: & \alpha \succ \beta \succ \gamma & \gamma: & a \succ b \succ c \end{array}$$

Тогда $\mu_M = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & c & b \end{matrix}$ — M-оптимальный устойчивый матчинг. Тем не менее, $\mu = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ c & a & b \end{matrix}$ для b такой же, а для a и c лучше, чем μ_M.

3. Другие модели.

Задача о матчинге, рассмотренная нами, называется двусторонней в отличие от «односторонней» задачи *о соседях по комнате* (roommate problem). В модели соседей по комнате имеется только одно множество индивидов и каждый имеет предпочтение, с кем ему лучше жить в комнате. Здесь могут отсутствовать устойчивые матчинги — нет аналога теоремы Гейла–Шепли.

Еще одна модель с отношением «один-к-многим»: модель *поступления в колледжи*. Имеется множество колледжей и множество студентов, поступающих в эти колледжи. Каждый колледж C_i набирает $q_i \geqslant 1$ студентов (q_i называется *квотой*), а каждый студент поступает в один колледж. В данной модели действителен тот же алгоритм отложенного принятия предложений: каждый колледж C_i делает предложения q_i студентам, а те отбирают наиболее предпочтительные для себя предложения.

Наконец, в модели *фирмы и работники* имеется множество фирм и множество работников. Каждый работник имеет предпочтения относительно фирм, где бы он желал работать, а каждая фирма — относительно подмножеств работников (так как работники образуют коллективы, и одни коллективы могут для фирмы оказаться предпочтительнее других).